DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 1
COMMENTAIRES
PSI2 2023-2024

EXERCICE

1.b. Classique. Je ne l'ai pas trop sanctionné, mais il faut isoler le terme pour $k = 1$ dans la majoration.

2.a. La série à étudier est une série télescopique associée à la suite (a_n), elle converge donc si et seulement si la suite (a_n) converge... et c'est le cas, de façon immédiate. Le calcul de la somme découle de cette observation. **Dans cette question et dans d'autres par la suite, j'ai vu beaucoup de confusions concernant le lien entre suites et séries.**

2.b. Ici, un développement asymptotique de a_k semble nécessaire.

3.a. Il n'est pas nécessaire ici de dériver... d'autant plus que le calcul de $g_n'(t)$ est souvent faux.

3.c. Le bon changement de variable est souvent proposé, mais avec souvent des erreurs dans l'expression de la dérivée de $t \mapsto 1 - 2^{-t}$.

3.d. Question un peu plus complexe, à décomposer en plusieurs étapes. Celles et ceux qui l'ont abordée ont souvent fait des confusions entre les différentes variables entrant en jeu.

3.e. Question assez facile, mais demandant un peu de développement tout de même.

PROBLÈME

Du grand classique: les intégrales de Wallis, la formule de Stirling, le calcul de $\zeta(2)$, un peu d'accélération de convergence. Il y a quelques points un peu techniques.

A.1. Pour le caractère **STRICTEMENT** positif de W_n, il y a un théorème dans le cours de première année (que j'appellerai **théorème de stricte positivité**) qui dit que "l'intégrale sur un segment d'une fonction **continue** de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle". Je n'ai vu mentionner la **continuité** de l'intégrande sur aucune copie!!! Ensuite, c'est une hipépé.

A.2. Pourquoi pas une récurrence puisque la réponse est donnée ?

A.4. Attention à l'écriture: dans plusieurs copies, j'ai vu $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n' = W_n$, ce qui n'a pas de sens! La limite d'une suite (ou d'une fonction) ne peut pas dépendre de la variable, ici l'entier n. Vous pensez probablement plutôt à un équivalent!

A.5. On utilise notamment $2n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$, c'était cité dans un certain nombre de copies, mais un peu escamoté dans d'autres!

A.6. Question un peu plus technique, il y a plusieurs choses à faire: transformer l'expression de $b_n - b_{n-1}$ (commencer par simplifier le plus possible avant de se lancer dans des développements limités!), faire un petit développement (si possible à l'économie: obtenir un $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est suffisant), rappeler le lien entre suites et séries (télescopiques). La question est souvent traitée de façon partielle.

A.8. Ici, il faut revenir à la définition de la limite! Des erreurs sur plusieurs copies: certains pensent que deux suites tendant vers 0 sont nécessairement équivalentes, aïe! Il suffit de penser à $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$!

J'ai vu pas mal de choses aberrantes, du genre: si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n \sim \sum v_n$ (???).

A.9. Classique comparaison série-intégrale. La question est souvent bien commencée, mais certains s'égarent en cours de route! Il est vrai qu'il faut encadrer ici un reste, pas une somme partielle...

B.1. et **B.2.** Des questions un peu calculatoires, souvent abandonnées en cours de route. Il faut s'entraîner!

B.3.a. Concavité rarement bien exploitée: la courbe est au-dessus de sa sécante.

B.4. Un télescopage pas toujours exploité!

B.6. Beaucoup de confusions. Selon certains, la somme T serait nulle (?).

C.1. Je rappelle qu'il y a deux choses à montrer: la linéarité de Δ et le caractère "endo". Ne pas confondre Δ (qui est un endomorphisme) et Δf qui est une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. Par exemple, c'est Δ qui est linéaire, mais c'est Δf qui est continue.

Les questions suivantes sont peu abordées.