

CORRIGÉ du DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 4
PSI2 2023-2024

PARTIE A. Recherche de sous-espaces stables. Étude d'exemples.

1.a. On a $\chi_u = \chi_A = X^2$, donc $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(A) = \{0\}$ (valeur propre double). La matrice A est de rang 1, donc $E_0(u) = \text{Ker}(u)$ est de dimension 1, puis $E_0(u) = \text{Vect}(e_1)$. L'image étant engendrée par les colonnes de la matrice, $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u) = \text{Vect}(e_1)$.

b. On a $\chi_v = \chi_B = X^2 + 1$, donc $\text{Sp}(v) = \text{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \emptyset$. La réponse eût été tout autre si v avait été défini comme endomorphisme de \mathbb{C}^2 . Puis $\text{Im}(v) = \mathbb{R}^2$ puisque la matrice B est de rang 2.

2.a. On notera (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 . En regardant la deuxième colonne de M , on voit immédiatement que $f(e_2) = e_2$, donc 1 est valeur propre de f , et e_2 est un vecteur propre associé. La somme des coefficients de chaque ligne de M vaut 2, donc 2 est valeur propre de f , et $e_1 + e_2 + e_3$ est un vecteur propre associé. Enfin, deux lignes de M sont égales, donc la matrice M n'est pas inversible, i.e. 0 est valeur propre de f , on recherche alors une relation de dépendance linéaire entre les colonnes, ce qui nous donnera un vecteur non nul du noyau. On trouve facilement la relation $C_1 + 3C_2 - C_3 = 0$, donc le vecteur $e_1 + 3e_2 - e_3$ appartient à $\text{Ker}(f)$.

Finalement, l'endomorphisme f admet trois valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Plus précisément, $\text{Sp}(f) = \{0, 1, 2\}$, $E_0(f) = \text{Vect}(e_1 + 3e_2 - e_3)$, $E_1(f) = \text{Vect}(e_2)$, $E_2(f) = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$.

Ou encore: $M = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b. Calculons, en commençant par $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\chi_g(x) = \chi_N(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ 1 & x-3 & -1 \\ -1 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 0 \\ x-3 & x-3 & -1 \\ x-3 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & x-2 & -1 \\ 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix},$$

un développement par rapport à la 1ère colonne donne enfin $\chi_g(x) = (x-3)[(x-2)^2 + 1]$, d'où $\text{Sp}(g) = \text{Sp}_{\mathbb{R}}(N) = \{3\}$, valeur propre simple. Il y a alors un seul sous-espace propre, qui est une droite vectorielle: $E_3(g) = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$, puisque l'on constate ici aussi que la somme des coefficients de chaque ligne vaut 3 (ce qui donne le vecteur propre).

3.a. Yaka l'écrire, puisque $\sum_{i=1}^n c_i x_i = C^T X$.

b. Supposons C vecteur propre de M^T , i.e. $M^T C = \lambda C$ pour un certain scalaire λ . En transposant cette relation, on a $C^T M = \lambda C^T$. Soit maintenant $x \in \mathbb{K}^n$ un vecteur de H , canoniquement identifié à une matrice-colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a donc $C^T X = 0$ d'après **a.** Alors $C^T(MX) = (C^T M)X = (\lambda C^T)X = \lambda(C^T X) = 0$, donc $MX \in H$ toujours d'après **a.** Mais MX est la matrice-colonne identifiée au vecteur $f(x)$, on a ainsi prouvé que $f(x) \in H$. Donc l'hyperplan H est bien stable par f .

c. Supposons maintenant H stable par f . On a donc

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad X \in H \implies MX \in H,$$

ou encore

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad C^T X = 0 \implies C^T MX = 0,$$

ou encore

$$(*) \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad C^T X = 0 \implies (M^T C)^T X = 0.$$

En posant $M^\top C = C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}$, deux cas se présentent:

- si $C' = 0$, alors $M^\top C = 0$, donc C est bien vecteur propre de M^\top pour la valeur propre 0 ;

- si $C' \neq 0$, alors $c'_1 x_1 + \dots + c'_n x_n = 0$ est l'équation d'un hyperplan H' qui contient H d'après (*), donc $H' = H$ par égalité des dimensions, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $C' = \lambda C$ puisque l'on sait que deux équations linéaires définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles (*dit autrement, deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles*), donc $M^\top C = \lambda C$, ce qu'il fallait prouver.

4.a. L'étude faite en **3.** montre que les plans vectoriels de \mathbb{R}^3 stables par f sont ceux qui admettent une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz = 0$, avec $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vecteur propre de M^\top . Déterminons donc les vecteurs propres de M^\top . Tout d'abord, M et M^\top ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres, ici 0, 1 et 2 d'après **2.a.** On obtient facilement

$$E_0(M^\top) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad E_1(M^\top) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad E_2(M^\top) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Il y a donc trois plans stables par f , qui ont pour équations respectives:

$$P_0 : x - z = 0, \quad P_1 : -2x + y + z = 0, \quad P_2 : x + z = 0.$$

Les droites stables par f sont celles qui sont engendrées par des vecteurs propres (résultat du cours), il y en a donc trois, qui sont les trois sous-espaces propres de f obtenus en **2.a.**

Il y a en tout 8 sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 stables par f , à savoir $\{0\}$, les trois "droites propres" obtenues en **2.a.**, les trois plans listés ci-dessus, et \mathbb{R}^3 .

b. On a $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(N^\top) = \text{Sp}_{\mathbb{R}}(N) = \{3\}$ et cette valeur propre est simple puisque N^\top a le même polynôme caractéristique que N . On obtient $E_3(N^\top) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, donc le seul plan

de \mathbb{R}^3 stable par g est celui d'équation cartésienne $y + z = 0$. Il y a en tout 4 sous-espaces de \mathbb{R}^3 stables par g , qui sont $\{0\}$, la "droite propre" $E_3(g)$ obtenue en **2.b.**, le plan ci-dessus, et l'espace \mathbb{R}^3 tout entier.

PARTIE B. Recherche de sous-espaces stables. Étude théorique.

5.a. Il y a au moins $\{0\}$ et E qui sont deux s.e.v. distincts et stables par f . Dans le cas de l'endomorphisme v de \mathbb{R}^2 associé à la matrice B de la question **1.b.**, il n'y a pas d'autre s.e.v. stable (il n'y a pas de vecteur propre, donc il n'y a pas de droite vectorielle stable).

b. Puisque f est non nul et non injectif, alors $\text{Ker}(f)$ est un s.e.v. de E , évidemment stable par f , distinct de $\{0\}$ et de E , il y a donc au moins trois s.e.v. stables distincts. Le s.e.v. $\text{Im}(f)$ est aussi stable par f , mais il peut coïncider avec $\text{Ker}(f)$. Mais, si n est impair, $\text{Ker}(f)$ et

$\text{Im}(f)$ sont alors deux s.e.v. de E distincts (car la somme de leurs dimensions est n impair, par le théorème du rang), distincts aussi de $\{0\}$ et de E , il y a donc au moins quatre s.e.v. stables.

- c. L'endomorphisme u de \mathbb{R}^2 de la question 1.a. admet exactement trois s.e.v. stables, qui sont $\{0\}$, $E = \mathbb{R}^2$, et la droite $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$. En effet, c'est la seule droite stable puisqu'il y a une seule valeur propre avec un sous-espace propre qui est cette droite.
- 6.a. Si $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, où les e_i sont des vecteurs propres de f , notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres associées, si $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i \in F$, alors $f(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i e_i \in F$, donc F est bien stable par f .

- b. Supposons $F = E_\lambda(f)$ de dimension au moins égale à 2, alors tout vecteur non nul de F est vecteur propre de f , donc toute droite vectorielle incluse dans F est stable par f . Or il y a une infinité de droites vectorielles incluses dans F : par exemple, si e_1 et e_2 sont deux vecteurs de F non colinéaires, les droites vectorielles $D_\alpha = \text{Vect}(e_1 + \alpha e_2)$, lorsque α décrit \mathbb{K} , sont toutes distinctes. Il y a donc une infinité de droites de E stables par f .
- c. Si tous les s.e.v. de E sont stables par f , c'est alors le cas en particulier de toutes les droites vectorielles, ce qui veut dire que tout vecteur non nul de E est vecteur propre de E . C'est un exercice classique de montrer que f est alors une homothétie. En effet, pour tout vecteur x non nul, il existe un scalaire λ_x (clairement unique) tel que $f(x) = \lambda_x x$.

Soient alors x et y deux vecteurs de E non colinéaires, on a $f(x) = \lambda_x x$, $f(y) = \lambda_y y$ et $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$, mais on a aussi par linéarité $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. De ces deux relations et de la liberté de la famille (x, y) , on tire $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$, donc $\lambda_x = \lambda_y$.

Si x et y sont deux vecteurs colinéaires mais non nuls, par exemple $y = \alpha x$, alors $f(x) = \lambda_x x$, $f(y) = \lambda_y y = \alpha \lambda_y x$, mais aussi, par linéarité, $f(y) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x$. Comme $\alpha \neq 0$ et $x \neq 0_E$, on tire $\lambda_x = \lambda_y$.

Finalement, le scalaire λ_x est le même pour tous les vecteurs x non nuls de E , notons-le λ , on a alors $f(x) = \lambda x$ pour tout vecteur x non nul, et cette relation étant trivialement vraie pour $x = 0_E$, on a bien $f = \lambda \text{id}_E$.

- 7.a. Soit \mathcal{B} une base de E constituée de vecteurs propres de E , une telle base existe car f est diagonalisable. Soit F un s.e.v. de E stable par f , soit \mathcal{F} une base de F . Alors \mathcal{F} est une famille libre dans E , et \mathcal{B} une famille génératrice, le théorème de la base incomplète dit alors qu'il est possible de compléter la famille \mathcal{F} en une base de E en lui adjoignant des vecteurs de \mathcal{B} . Notons $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$, il existe donc $n - p$ vecteurs $\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n$ choisis dans la famille \mathcal{B} tels que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$ soit une base de E . En posant $G = \text{Vect}(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$, on construit ainsi un supplémentaire de F dans E , et ce s.e.v. G est stable par f puisqu'il est engendré par des vecteurs propres de f .

- b. Posons $S = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$ comme le suggère l'énoncé. Alors S est stable par f car il est engendré par des vecteurs propres de f . Il admet donc un supplémentaire G lui aussi stable par f par hypothèse. Si on suppose $G \neq \{0_E\}$, alors l'endomorphisme induit f_G admet au moins une valeur propre (puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), et il existe alors un vecteur propre x associé, qui est alors aussi vecteur propre de f . Ce vecteur x est non nul et appartient à $S \cap G$, ce

qui est absurde. On a donc nécessairement $G = \{0_E\}$, donc $S = E$, ce qui signifie que f est diagonalisable.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ce n'est plus vrai, un contre-exemple est donné par l'endomorphisme v de \mathbb{R}^2 introduit en 1.b. En effet, les seuls sous-espaces de \mathbb{R}^2 stables par v sont $\{0\}$ et \mathbb{R}^2 , qui admettent chacun un supplémentaire stable (respectivement \mathbb{R}^2 et $\{0\}$), pourtant v n'est pas diagonalisable puisqu'il n'admet aucune valeur propre.

8. Si f est trigonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E dans laquelle f est représenté par une matrice triangulaire supérieure, les sous-espaces $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ vérifient alors les conditions demandées.

Réciproquement, supposons l'existence des sous-espaces F_k , $0 \leq k \leq n$. On construit par récurrence une famille de vecteurs (e_1, \dots, e_n) telle que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on ait $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. Pour cela, on prend pour e_1 un vecteur directeur de la droite vectorielle F_1 et, si l'on suppose construits e_1, \dots, e_k avec $1 \leq k \leq n-1$, comme le sous-espace F_k peut être considéré comme un hyperplan dans F_{k+1} , si l'on prend un vecteur e_{k+1} dans $F_{k+1} \setminus F_k$, on a $F_{k+1} = F_k \oplus \text{Vect}(e_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$. Au final, la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ engendre $E = F_n$ et c'en est une base car elle a le bon cardinal. Enfin, la stabilité des sous-espaces F_k fait que la matrice de f dans cette base est triangulaire supérieure.

PARTIE C. Une CNS de stabilité (cas diagonalisable).

9. Soit $x \in F$. Il existe $(x_1, \dots, x_p) \in (F \cap E_1) \times \dots \times (F \cap E_p)$ tel que $x = \sum_{i=1}^p x_i$. On a alors

$f(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ et, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lambda_i x_i \in F \cap E_i$, donc $f(x) \in F$. On a prouvé que F est stable par f .

- 10.a. Comme f est diagonalisable, $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$, donc x admet une unique décomposition en

$$x = \sum_{i=1}^p x_i \text{ avec chaque } x_i \text{ dans } E_i.$$

- b. La famille \mathcal{B}_x est génératrice de V_x par définition de V_x , et elle est libre car c'est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de f .

- c. Une récurrence immédiate donne $f^{j-1}(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{j-1} x_i$ pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on a donc $f^{j-1}(x) \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_r) = V_x$. On observe que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_x}(\mathcal{F}_x) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}).$$

On reconnaît une matrice de Vandermonde.

- d.** Comme les λ_i sont deux à deux distincts, le déterminant (de Vandermonde) de la matrice ci-dessus est non nul, on en déduit que la famille \mathcal{F}_x est une base de V_x .
- e.** Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, le vecteur x_i appartient à V_x , donc est combinaison linéaire des vecteurs de la famille \mathcal{F}_x d'après **d.**, i.e. $x_i \in \text{Vect}(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$. Comme $x \in F$ et que F est supposé stable par f , les vecteurs $f^{j-1}(x)$, avec $1 \leq j \leq r$, sont dans F , puis $x_i \in F$ comme combinaison linéaire de vecteurs de F . Donc $x_i \in F \cap E_i$ pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

Enfin, $x = \sum_{i=1}^r x_i \in \bigoplus_{i=1}^r (F \cap E_i)$, et a fortiori $x \in \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$.

On a ainsi prouvé l'inclusion $F \subset \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$, et l'inclusion inverse est immédiate.