Rayon de convergence.

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$, avec

a. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$; **b.** $a_n = n^{(-1)^n}$; **c.** $a_n = \dbinom{2n}{n}$; **d.** $a_n = \lfloor 10^n \pi \rfloor - 10 \times \lfloor 10^{n-1}\pi \rfloor$

(dans le **d.**, le coefficient a_n est la n-ème décimale du nombre π).

- -

a. On a $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{e}$, donc $R = e$ par la règle de d'Alembert.

b. On a $a_n = n$ si n est pair, $a_n = \dfrac{1}{n}$ si n est impair. Dans les deux cas, $\dfrac{1}{n} \leq a_n \leq n$ pour tout $n \geq 1$. Les séries entières $\sum nx^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ ayant toutes deux pour rayon de convergence 1 (par application immédiate de la règle de d'Alembert), on déduit, par comparaison, que $R = 1$.

c. $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dbinom{2n+2}{n+1}}{\dbinom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{\big((n+1)!\big)^2}\,\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$$ après quelques simplifications. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$, puis $R = \dfrac{1}{4}$.

d. La suite (a_n) est bornée puisque $0 \leq a_n \leq 9$, donc $R \geq 1$. La série $\sum a_n$ diverge grossièrement car il est bien connu que le nombre π n'est pas décimal (il est même irrationnel), donc les a_n ne peuvent être tous nuls à partir d'un certain rang, on trouve donc dans la suite (a_n) une infinité de termes supérieurs ou égaux à 1, cette suite ne peut donc tendre vers zéro. On en déduit que $R \leq 1$. Finalement $R = 1$.

---

2. On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, avec $l \in \overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$?

- -

Montrons que le rayon de convergence est $R = \dfrac{1}{l}$ avec les conventions habituelles ($\dfrac{1}{l} = 0$ si $l = +\infty$, et $\dfrac{1}{l} = +\infty$ si $l = 0$). Posons $J = \big\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\big\}$.

$\triangleright$ soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < \dfrac{1}{l}$, alors $rl < 1$ et, comme

$$\textbf{(*)} : \qquad \sqrt[n]{|a_n|r^n} = r\,\sqrt[n]{|a_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} rl\ ,$$

on a $\sqrt[n]{|a_n|r^n} < 1$ à partir d'un certain rang, donc aussi $|a_n|r^n < 1$ APCR, et la suite $\big(|a_n|r^n\big)$ est bornée, donc $r \in J$.

On a prouvé que $\left[0, \dfrac{1}{l}\right[\subset J$, donc $R \geq \dfrac{1}{l}$.

$\triangleright$ Soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r > \dfrac{1}{l}$, alors $rl > 1$ et, de **(*)**, on déduit que $|a_n|r^n > 1$ à partir d'un certain rang, donc la série $\sum a_n r^n$ est grossièrement divergente, ce qui prouve que $r \geq R$.

On a ainsi montré que $\left]\dfrac{1}{l},+\infty\right[\subset [R,+\infty[$, ce qui entraîne $R \leq \dfrac{1}{l}$.

Bilan. $R = \dfrac{1}{l}$.

---

3. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0,+\infty]$.

a. Soit P un polynôme non nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} P(n)\, a_n\, z^n$.

b. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^2 z^n$.

- -

a. Allons-y par petites touches : d'abord, si deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont telles que $a_n \sim b_n$, alors elles ont le même rayon de convergence : en effet, si $a_n \sim b_n$, alors il existe des constantes C_1 et C_2 strictement positives telles que $C_1\,|a_n| \leq |b_n| \leq C_2|a_n|$ à partir d'un certain rang. De $|b_n| \geq C_1\,|a_n|$, on déduit que $R_B \leq R_A$, et de $|b_n| \leq C_2\,|a_n|$, on déduit $R_B \geq R_A$, donc $R_B = R_A$.

Si P est un polynôme constant non nul, la série entière $\sum P(n)\, a_n\, z^n$ a aussi pour rayon de convergence R (*évident*). Si P est un polynôme de degré $d > 0$, on a $P(n)\, a_n \sim C\, n^d\, a_n$, où C est une constante non nulle (le coefficient dominant du polynôme P), il suffit donc de montrer que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} n^d\, a_n\, z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$.

Or on sait que la série $\sum n\, a_n\, z^n$ a le même rayon de convergence R que la série $\sum a_n z^n$ puisque c'est (presque) sa série dérivée, il suffit donc d'itérer d fois ce raisonnement pour conclure.

b. On sait que $R = \sup(J)$, avec $J = \big\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\big\}$. Le rayon de convergence R' de $\sum a_n z^{2n}$ est $R' = \sup(J')$, avec $J' = \big\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n r^{2n}) \text{ est bornée}\big\}$.
Or, $r \in J' \iff r^2 \in J$, donc l'intervalle J' est constitué exactement des racines carrées des éléments de J, puis $R' = \sqrt{R}$.

De même, le rayon de convergence R'' de $\sum a_n^2\, z^n$ est $R'' = \sup(J'')$, avec

$$J'' = \big\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n^2\, r^n) \text{ est bornée}\big\} = \big\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } \big(a_n\, (\sqrt{r})^n\big) \text{ est bornée}\big\}\ .$$

En effet, une suite est bornée si et seulement si la suite des carrés est bornée. Donc $r \in J'' \iff \sqrt{r} \in J$, l'intervalle J'' est constitué exactement des carrés des éléments de J, d'où $R'' = R^2$.

Attention! Il aurait été faux de commencer la démonstration par : "la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{R}$ "...!!! Je rappelle qu'il n'y a pas de réciproque à la règle de d'Alembert!

---

4. Soit une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence non nul. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n\, z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

- -

Puisque la première série entière a un rayon de convergence non nul, il existe un $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée : $|a_n|\, r^n \leq M$. On en déduit une majoration des coefficients par une suite géométrique : $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$, avec $M > 0$ et $r > 0$. Il en résulte la majoration $\left|\frac{a_n}{n!}\right| \leq \frac{M}{n!\, r^n}$ et, comme la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!\, r^n}$ a un rayon de convergence infini (c'est une série exponentielle), par comparaison, la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n\, z^n}{n!}$ a aussi un rayon de convergence infini.

Expression de la somme d'une série entière.

5. Rayon de convergence et calcul de la somme des séries entières $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{\operatorname{ch} n}{n!} x^n$.
(*ce sont deux questions indépendantes*)

- -

a. La règle de d'Alembert donne immédiatement $R = 1$. Posons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$ pour $x \in]-1, 1[$ intervalle de convergence. On a alors

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = \frac{x}{1-x^2} .$$

Puis, comme $f'(0) = 0$, on a $f'(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) = -\frac{1}{2} \left[\ln(1+x) + \ln(1-x)\right]$, enfin comme $f(0) = 0$, tenant compte de $\int \ln(x)\, \mathrm{d}x = x\, \ln(x) - x$, on obtient

$$f(x) = x - \frac{1}{2} \left[(1+x)\, \ln(1+x) - (1-x)\, \ln(1-x)\right] .$$

Pour approfondir, notons que la série entière converge normalement sur $[-1, 1]$ **fermé**, donc la fonction somme est définie et continue sur $[-1, 1]$ fermé. Ainsi, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 - \ln(2)$. Comme f est impaire, $f(-1) = \ln(2) - 1$.

b. On a $\operatorname{ch}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^x$, donc $a_n = \frac{\operatorname{ch}(n)}{n!} \sim \frac{e^n}{2n!}$, puis

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}\, \frac{\operatorname{ch}(n+1)}{\operatorname{ch}(n)} \sim \frac{e}{n} \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0 ,$$

donc $R = +\infty$ par la règle de d'Alembert. Posons donc $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(n)}{n!} x^n$ pour tout x réel. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2n!}\, x^n \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e\,x)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{-1}\,x)^n}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\exp(ex) + \exp\left(\frac{x}{e}\right)\right]. \end{aligned}$$

---

6. Rayon de convergence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-3}{(n-1)!}\, x^n$.

- -

Posons $a_n = \frac{n-3}{(n-1)!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour $n \geq 4$, on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n-2}{n(n-3)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
La règle de d'Alembert permet donc d'affirmer que le rayon de convergence de la série entière est infini. Posons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-3}{(n-1)!}\, x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$. On écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)-2}{(n-1)!}\, x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x^2\, e^x - 2x\, e^x\,. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x(x-2)\, e^x$.

---

7. On rappelle que $\forall x \in]-1,1[\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$ et calculer sa somme en tout point x de l'intervalle ouvert de convergence. Que se passe-t-il aux bornes de cet intervalle ?

- -

En posant $u_n(x) = \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$, on a $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{n(2n+1)}{(n+2)(2n+3)} x^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^2$
donc la série entière de terme général $u_n(x)$ est convergente lorsque $|x| < 1$, divergente lorsque $|x| > 1$; son rayon de convergence est donc 1.

Faisons le calcul de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ pour $x \in]-1,1[$ (*intervalle de convergence*). Pour cela, on utilise la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1} \; .$$

On obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \\ &= x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} - 4x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

(les trois séries sont convergentes pour $x \in]-1,1[$ puisque ce sont trois séries entières de rayon de convergence 1). Pour $t \in]-1,1[$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$. En posant $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $x \in]-1,1[$, on a $g(0) = 0$ et $g'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2} - 1$, donc

$$g(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} - x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x \; .$$

On obtient donc, pour $x \in \,]-1,1[\,$,

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 \ln(1-x^2) - \ln(1-x^2) - x^2 - 2x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 4x^2 \\ &= 3x^2 - (x^2+1) \big[\ln(1+x) + \ln(1-x)\big] - 2x \big[\ln(1+x) - \ln(1-x)\big] \\ &= 3x^2 - (1+x)^2 \ln(1+x) - (1-x)^2 \ln(1-x) \; . \end{aligned}$$

La série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur le segment $[-1,1]$ puisque $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ est une série numérique convergente (terme général équivalent à $\dfrac{1}{2n^3}$). Sa somme f est donc une fonction définie et continue sur le segment $[-1,1]$, nous avons calculé l'expression de $f(x)$ pour $x \in]-1,1[$; pour avoir $f(1)$, il suffit donc de faire tendre x vers 1 dans l'expression obtenue. En utilisant $\displaystyle\lim_{u\to 0} u^2 \ln u = 0$, on obtient $f(1) = \displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = 3 - 4 \ln 2$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = 3 - 4\ln 2$. Bien sûr, la fonction f est paire et $f(-1) = f(1)$.

---

8. Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n\, x^n}{(2n+1)!}$.

- -

Le rayon de convergence est $+\infty$, par application immédiate de la règle de d'Alembert. Posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\, x^n}{(2n+1)!}$ pour $x \in \mathbb{R}$. On voit facilement que $f(x) = x\, g'(x)$, avec

$g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$. Pour $x > 0$, on a $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ et, pour $x < 0$, on a

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(\sqrt{-x})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}\ .$$

Finalement,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\sqrt{-x})}{2} - \dfrac{\sin(\sqrt{-x})}{2\sqrt{-x}} & \text{si} \quad x < 0\ ; \\[2ex] \dfrac{\mathrm{ch}(\sqrt{x})}{2} - \dfrac{\mathrm{sh}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 0\ ; \end{cases} \qquad ; \quad f(0) = 0\ .$$

---

9. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

a. Ensemble de définition de f ?

b. Exprimer $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles sur $]-1,1[$.

c. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

- -

a. On reconnaît une série entière de rayon de convergence 1 (par exemple par la règle de d'Alembert). D'autre part, cette série entière converge normalement sur $[-1,1]$ puisque la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente. Donc $D_f = [-1,1]$.

b. En décomposant en éléments simples, et en utilisant le fait que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \ln(1+x)$ pour $x \in\,]-1,1[$, on obtient, toujours pour $x \in\,]-1,1[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) x^n \;=\; x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n} \\ &= x\, \ln(1+x) + \big(\ln(1+x) - x\big) \;=\; (1+x)\, \ln(1+x) - x\ . \end{aligned}$$

c. Comme la série définissant f converge normalement sur $[-1,1]$ et que chacune des fonctions est continue, la somme f est continue sur $[-1,1]$. On a donc

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2\,\ln(2) - 1 \qquad \text{et} \qquad f(-1) = \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = 1\ .$$

---

10. Rayon de convergence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}\, x^n$.

- -

Posons $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$. Comme la suite (a_n) est bornée, on déduit que le rayon de convergence R de la série entière vérifie $R \geq 1$. Pour $x \in]-1,1[$, posons $s(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}\, x^n$. Alors $s(x) = \operatorname{Im} f(x)$, avec $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in}}{n}\, x^n$ (*la règle de d'Alembert montre que le rayon de convergence de cette dernière série entière est 1 exactement*). Par ailleurs, pour $x \in]-1,1[$, on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{in} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i(n+1)} x^n = e^i \sum_{n=0}^{+\infty} (x\, e^i)^n = \frac{e^i}{1 - x\, e^i} \ .$$

Continuons à torturer cette expression afin d'en extraire (même s'il faut recourir au supplice qui consiste à multiplier et diviser par le conjugué du dénominateur) la partie imaginaire :

$$f'(x) = \frac{e^i\,(1 - x\, e^{-i})}{(1 - x\, e^i)\,(1 - x\, e^{-i})} = \frac{e^i - x}{1 - 2x\, \cos 1 + x^2} = \frac{\cos 1 - x + i\, \sin 1}{1 - 2x\, \cos 1 + x^2} \ .$$

Donc $s'(x) = \operatorname{Im} f'(x) = \dfrac{\sin 1}{1 - 2x\, \cos 1 + x^2} = \dfrac{\sin 1}{(x - \cos 1)^2 + \sin^2 1}$, et un calcul classique de primitive, avec le changement de variable affine $x - \cos 1 = t\, \sin 1$, donne

$$\int \frac{\sin 1\, \mathrm{d}x}{(x - \cos 1)^2 + \sin^2 1} = \int \frac{\sin^2 1\, \mathrm{d}t}{\sin^2 1\, (t^2 + 1)} = \operatorname{Arctan} t = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x - \cos 1}{\sin 1}\right) .$$

On a donc, pour $x \in]-1,1[$, $s(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x - \cos 1}{\sin 1}\right) + C$, où C est une constante que l'on détermine grâce à la relation $s(0) = 0$. On obtient $C = \operatorname{Arctan}(\operatorname{cotan} 1) = \dfrac{\pi}{2} - 1$, d'où

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}\, x^n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x - \cos 1}{\sin 1}\right) + \frac{\pi}{2} - 1 \ .$$

Remarque : On peut montrer aussi, par un autre calcul que je n'expliciterai pas, que

$$\forall x \in]-1,1[\qquad s(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x\, \sin 1}{1 - x\, \cos 1}\right) .$$

On montre en fait que les deux expressions ci-dessus ont la même dérivée et prennent la même valeur pour $x = 0$.

---

11. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

- -

Solution 1. On a facilement $R = +\infty$ et, sachant que, pour tout z complexe, $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, on déduit

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad e^z + e^{jz} + e^{j^2 z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + j^n + j^{2n}) \frac{z^n}{n!} = 3 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^{3p}}{(3p)!}$$

en posant $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (racine cubique de l'unité), on a en effet la relation $1 + j + j^2 = 0$ et, plus généralement, $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^n + (j^n)^2$ vaut 3 si l'entier n est multiple de 3, et 0 sinon. Donc

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3}\left(e^z + e^{jz} + e^{j^2 z}\right) .$$

Pour x réel, on obtient

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{3}\left(e^x + e^{-\frac{x}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}x} + e^{-\frac{x}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}x}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(e^x + 2\, e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right)\right) . \end{aligned}$$

Solution 2. On a facilement $R = +\infty$ et, comme la fonction somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et se dérive terme à terme sur l'intervalle de convergence (ici $\mathbb{R}$), on obtient $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$, puis $S''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$. On remarque alors que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad S(x) + S'(x) + S''(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} = e^x \ :$$

la fonction S est solution de l'équation différentielle **(E)** : $y'' + y' + y = e^x$. Cette équation linéaire admet pour solution évidente $y = \frac{1}{3}e^x$, puis l'équation sans second membre associée fait intervenir l'équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$, dont les racines sont j et j^2 (*cf. solution 1*). Les solutions de **(E)** sont alors les fonctions de la forme

$$y = \frac{1}{3}e^x + A\, e^{jx} + B\, e^{j^2 x} = \frac{1}{3}e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(\lambda \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \mu \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) .$$

En tenant compte des conditions initiales $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$, on obtient (*il y a un peu de calcul*) $\lambda = \frac{2}{3}$ et $\mu = 0$, ce qui donne le résultat obtenu par la *solution 1.*

---

12. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, de somme $f(z)$.

a. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ à l'aide de f.

b. Même question avec $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} z^{3n}$.

- -

• Si $|z| < R$, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $f(-z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n z^n$, donc

$$f(z) + f(-z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(1 + (-1)^n\big) a_n z^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2p} z^{2p}$$

(seuls restent les termes d'indices pairs, et on réindexe). Ainsi,

$$\forall z \in D(0,R) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n} = \frac{1}{2}\big(f(z) + f(-z)\big)\ .$$

• Introduisons le nombre complexe $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (racine cubique de l'unité). On a alors les relations $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$. Les racines cubiques de l'unité sont 1, j et j^2. Si $|z| < R$, alors

$$f(z) + f(jz) + f(j^2 z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + j^n + j^{2n}) a_n z^n$$

et on vérifie que $1 + j^n + j^{2n} = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad n \text{ est multiple de } 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Il ne reste alors que les termes dont l'indice est de la forme $3p$, donc $f(z) + f(jz) + f(j^2 z) = 3 \sum_{p=0}^{+\infty} a_{3p} z^{3p}$. Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} z^{3n} = \frac{1}{3}\big(f(z) + f(jz) + f(j^2 z)\big)\ .$$

---

13. Pour tout n entier naturel, on pose $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Déterminer le rayon de convergence R et la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Quelle est la nature des séries numériques $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$? En cas de convergence, calculer leur somme.

- -

• Notons d'abord que, pour $t \in [0,1]$, on a $1 \leq 1 + t \leq 2$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \leq a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\ .$$

La série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}\,x^n$ ayant pour rayon de convergence 1 (la règle de d'Alembert s'applique "gentiment"), on en déduit par comparaison que $1 \leq R \leq 1$, donc $R = 1$.

• Par ailleurs, la minoration $a_n \geq \frac{1}{2(n+1)}$ montre (comparaison de séries à termes positifs) que la série entière diverge pour $x = 1$, i.e. la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n$ est divergente.

• La suite (a_n) est décroissante (*immédiat*) et tend vers zéro (d'après la majoration obtenue ci-dessus), donc par le critère spécial des séries alternées, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ converge.

• Posons $\displaystyle f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ (fonction somme de la série entière). D'après ce qui précède, on a $D_f=[-1,1[$. Calculons d'abord $f(x)$ pour $x\in\,]-1,1[$ (intervalle de convergence). On a alors $\displaystyle f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{(xt)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$, on est bien sûr tenté d'intervertir série et intégrale. Justifions-le : Fixons $x\in\,]-1,1[$ et posons $u_n(t)=\dfrac{(xt)^n}{1+t}$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $t\in[0,1]$; on a alors $|u_n(t)|\leq|x|^n$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}|x|^n$ converge, on a ainsi prouvé la convergence normale sur $[0,1]$ de la série de fonctions (continues) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$, ce qui autorise l'interversion. Donc

$$f(x)=\int_0^1\frac{1}{1+t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(xt)^n\right)\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1-xt)}\ .$$

On décompose en éléments simples : $\dfrac{1}{(1+t)(1-xt)}=\dfrac{1}{1+x}\left(\dfrac{1}{1+t}+\dfrac{x}{1-xt}\right)$, le détail du calcul est laissé au lecteur mais n'est pas difficile puisque la fraction rationnelle à décomposer admet deux pôles simples qui sont -1 et $\dfrac{1}{x}$ (*en toute rigueur, le cas* $x=0$ *doit être traité à part, mais au final on obtient le même résultat*). Donc

$$\forall x\in\,]-1,1[\qquad f(x)=\frac{1}{1+x}\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}+\int_0^1\frac{x\,\mathrm{d}t}{1-xt}\right)=\frac{\ln(2)-\ln(1-x)}{1+x}\ .$$

• Calculons enfin $f(-1)$; l'interversion série-intégrale faite ci-dessus ne peut plus être justifiée de la même façon, la série de fonctions $\sum u_n$ n'étant plus normalement convergente. Démontrons la continuité sur $[-1,0]$ de la fonction f. Pour $x\in[-1,0]$ et $n\in\mathbb{N}$, posons $v_n(x)=a_nx^n=(-1)^n\,a_n|x|^n$ (puisque a_n est positif et x est négatif). La suite $(a_n|x|^n)$ est décroissante (*par exemple comme produit de deux suites positives décroissantes*) et tend vers zéro (puisque $0\leq a_n|x|^n\leq\dfrac{1}{n+1}$), donc le critère spécial des séries alternées s'applique, celui-là même qui permet de majorer en valeur absolue le reste d'ordre n par le “premier terme négligé”, soit

$$\forall x\in[-1,0]\quad\forall n\in\mathbb{N}\qquad|r_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_kx^k\right|\leq a_{n+1}|x|^{n+1}\leq a_{n+1}\leq\frac{1}{n+2}\ ;$$

on a ainsi prouvé la convergence uniforme de la suite de fonctions (r_n) vers la fonction nulle sur $[-1,0]$, donc la convergence uniforme sur $[-1,0]$ de la série entière définissant f. On en déduit la continuité de f sur $[-1,0]$, et particulièrement au point -1, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^na_n=f(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{\ln(1-x)-\ln(2)}{1+x}=\frac{1}{2}$$

(je pense que vous avez reconnu un taux d'accroissement!).

Propriétés de la fonction somme.

14. On pose $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ pour tout réel x tel que la série converge.

a. Quel est l'ensemble de définition de f ?

b. Montrer que f est continue sur $[-1,1[$.

c. Quelle est la limite de f en 1^- ?

- -

a. La fonction f est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1 (évident, par exemple par la règle de d'Alembert), donc $]-1,1[\subset D_f\subset[-1,1]$. Or, la série diverge pour $x=1$ (série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2}$), et elle converge pour $x=-1$ (série alternée vérifiant les hypothèses du théorème spécial, puisque la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante et tend vers 0). Ainsi, $D_f=[-1,1[$.

b. D'après le cours sur les séries entières, la fonction somme f est continue sur l'intervalle de convergence $]-1,1[$, il reste donc à prouver la continuité (à droite) au point -1. Pour cela, montrons en fait la continuité de f sur le segment $[-1,0]$. Si on pose $u_n(x)=\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$, pour $x\in[-1,0]$, on peut écrire $u_n(x)=(-1)^n\dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}$, et la suite $\left(\dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers zéro. Le théorème spécial permet donc d'affirmer que le reste $r_n(x)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)$ est majoré, en valeur absolue, par le premier terme négligé, i.e. $\big|r_n(x)\big|\le\dfrac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\le\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. La dernière majoration est "uniforme" et permet d'écrire que $\|r_n\|_{\infty,[-1,0]}\le\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. On a donc prouvé la convergence uniforme, sur $[-1,0]$, de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\ge1}u_n$. Comme chaque fonction u_n est continue sur $[-1,0]$, la fonction somme f l'est aussi par théorème, ce qui permet de conclure.

c. La fonction f est croissante sur $[0,1[$ (comme somme de fonctions croissantes). D'après le théorème de la limite monotone, elle admet donc une limite au point 1 dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si cette limite était finie, disons $\displaystyle\lim_{x\to1^-}f(x)=l\in\mathbb{R}_+^*$, on aurait alors, par croissance de f, $\forall x\in[0,1[\quad f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{\sqrt{k}}\le l$. Comme on travaille sur une série à termes positifs, toute somme partielle est majorée par la somme globale, donc cela impliquerait

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad\forall x\in[0,1[\qquad\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{\sqrt{k}}\le l\ .$$

En fixant n, on pourrait faire tendre x vers 1 dans cette inégalité, soit $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq l$.

Mézalor, la série à termes positifs $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, dont les sommes partielles seraient majorées, serait convergente, ce qui n'est pas. On a obtenu une contradiction.

On conclut que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

---

15. Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par :

- $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$ pour $x < 0$;
- $f(0) = 1$;
- $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$ pour $x > 0$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.

- -

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ comme composée et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, le seul problème est en 0. Mais on va montrer que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$, ce qui réglera le problème. En effet,

• si $x \in]-1, 1[$, on connaît le développement $\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; on en déduit que

$$\forall x \in]-1, 0[\qquad f(x) = \frac{\operatorname{Arctan}(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{-x})^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} .$$

• si $x \in]-1, 1[$, on a $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, donc

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1[\qquad f(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\ln(1+\sqrt{x}) - \ln(1-\sqrt{x})\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\sqrt{x})^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^n}{n}\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2p+1}}{2p+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} . \end{aligned}$$

Finalement, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1, 1[$: la fonction f, développable en série entière sur $]-1, 1[$, est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle.

---

16. Pour n entier naturel, on pose $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,

$$b_n = \mathrm{Card}\left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p^2+q^2 = n\right\} \qquad \text{et} \qquad c_n = \mathrm{Card}\left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p^2+q^2 \leq n\right\} .$$

On admet par ailleurs que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Pour $x \in]-1,1[$, on pose $\displaystyle A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\displaystyle B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ et $\displaystyle C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.

a. Donner une autre expression de $A(x)$. Par une méthode de comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $A(x)$ lorsque $x \to 1^-$.

b. Exprimer $B(x)$ et $C(x)$ à l'aide de $A(x)$, et en donner des équivalents lorsque $x \to 1^-$.

- -

a. On a $\displaystyle A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$. On voit que le rayon de convergence de cette série entière est 1 en appliquant la règle de d'Alembert avec $u_n(x) = x^{n^2}$. Pour tout $x \in]0,1[$, la fonction $f_x : t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln(x)} = e^{-t^2\,|\ln(x)|}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par une classique comparaison série-intégrale, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \int_n^{n+1} f_x(t)\,\mathrm{d}t \leq f_x(n) \leq \int_{n-1}^{n} f_x(t)\,\mathrm{d}t ,$$

l'inégalité de gauche étant aussi vraie pour $n=0$. En sommant pour n de 0 à l'infini (*mais pas au-delà!*), et en isolant dans la majoration le terme pour $n=0$, on obtient l'encadrement (*les séries et intégrales généralisées apparaissant dans ce calcul sont convergentes, le lecteur s'en persuadera si nécessaire*):

$$\forall x \in]0,1[\qquad I(x) \leq A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_x(n) \leq 1 + I(x) ,$$

en posant

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2\,|\ln(x)|}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{|\ln(x)|}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{|\ln(x)|}} .$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} I(x) = +\infty$, le terme constant 1 est négligeable, on en déduit l'équivalent

$$A(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{|\ln(x)|}} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}} .$$

b. On a $\displaystyle b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p a_q$. En effet, pour dénombrer les couples d'entiers naturels (p,q) vérifiant $p^2+q^2 = n$, on compte combien il y a d'entiers k dans $[\![0,n]\!]$ tels que k et $n-k$ soient tous les deux des carrés. On reconnaît alors un "carré de Cauchy". Le cours indique que la série entière $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1 (mais comme il existe des entiers n aussi grands que l'on veut pour lesquels $b_n \geq 1$, la suite (b_n) ne tend pas vers 0, donc le rayon de convergence est aussi au plus égal à 1, donc finalement il vaut 1). On a donc, pour tout $x \in]-1,1[$, $B(x) = A(x)^2$. Donc

$$B(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \frac{\pi}{4(1-x)} .$$

Enfin, $c_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{p+q=n} 1 \times b_q$. On reconnaît encore un produit de Cauchy, de deux séries entières de rayon de convergence 1, donc la série entière $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1 d'après le cours (et comme $c_n \geq b_n \geq 0$, par comparaison ce rayon de convergence vaut encore 1 nécessairement), et

$$\forall x \in]-1,1[\qquad C(x) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} x^p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q x^q \right) = \frac{B(x)}{1-x} = \frac{A(x)^2}{1-x} .$$

Donc $C(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \dfrac{\pi}{4(1-x)^2}$.

---

17. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique, non nulle, et N-périodique avec $N \in \mathbb{N}^*$.

a. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$?

b. Montrer que la fonction somme de cette série entière est une fonction rationnelle.

- -

a. La suite (a_n) ne tend pas vers zéro: en effet, il y a au moins un coefficient non nul a_{n_0}, et on a alors $a_{n_0+kN} = a_{n_0}$ pour tout k entier naturel. Donc la série $\sum a_n$ diverge grossièrement, et cela entraîne $R \leq 1$.

D'autre part la suite (a_n) est périodique, donc bornée, et cela entraîne $R \geq 1$: en effet, si $|a_n| \leq M$, le rayon de convergence R est au mooins égal à celui de la série géométrique $\sum M x^n$, qui vaut 1.

Finalement, $R = 1$.

b. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n &= \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{n+N} + \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{n+2N} + \cdots \\
&= \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n \right) \left(1 + z^N + z^{2N} + \cdots \right) \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n}{1 - z^N} ,
\end{aligned}$$

et la somme est une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynomiales).

Développement en série entière.

18. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, et que l'on peut écrire, sur $\mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) f(x)$, où P_n est une fonction polynomiale.

b. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier naturel n.

c. La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de zéro ?

- -

a. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Montrons que, sur $\mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x)$ est de la forme demandée par récurrence sur n.

La propriété est vraie pour $n = 0$ avec $P_0 = 1$.

Supposons que, pour n donné, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\,\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$. Alors

$$f^{(n+1)}(x) = \left[-\frac{1}{x^2}\,P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}\,P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right]\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

donc, en posant $P_{n+1}(X) = -X^2\,P_n'(X) + 2X^3\,P_n(X)$, nous avons

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

et P_{n+1} est une fonction polynomiale, ce qui achève la démonstration.

Plus précisément $\deg(P_{n+1}) = \deg(P_n)+3$ *et* $\deg(P_0) = 0$ *donc, pour tout* n, $\deg(P_n) = 3n$. *De plus, si* a_n *est le coefficient dominant de* P_n*, nous avons* $a_{n+1} = 2a_n$ *et* $a_0 = 1$ *donc pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^n$*. Enfin en écrivant*

$$P_n(x) = e^{x^2} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

et en remarquant que, f *étant paire,* $f^{(n)}$ *a la même parité que* n*, nous voyons que* P_n *a la même parité que* n*.*

b. Le problème se situe en 0. Commençons par montrer que pour tout polynôme P,

$$\lim_{x\to 0} P\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0\ .$$

Il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$. Or, en posant $t = \dfrac{1}{x^2}$ nous avons effectivement (*on utilise ensuite la parité*) :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \qquad \text{car} \qquad \lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}}\,e^{-t} = 0.$$

On en déduit donc que, pour tout n entier naturel, on a $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$.

Montrons alors par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car $\lim\limits_{x\to 0} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$. De plus, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et, d'après ce qui précède, $\lim\limits_{0} f' = 0$ donc (théorème "limite de la dérivée") f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = \lim\limits_{0} f' = 0$. La propriété est donc vraie pour $n = 1$.

Supposons la propriété vraie pour n fixé et montrons-la pour $n+1$.
D'après l'hypothèse de récurrence $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$; comme elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que $\lim\limits_{0} f^{(n+1)} = \lim\limits_{0} \left(f^{(n)}\right)' = 0$, alors $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\left(f^{(n)}\right)'(0) = 0$, c'est-à-dire f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n+1)}(0) = 0$, ce qui achève la preuve.
La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.

c. La série de Taylor de f en zéro est $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n\geq 0} 0$ et le seul point en lequel f s'annule est 0, donc f n'est développable en série entière dans aucun intervalle $]-r, r[$ avec $r > 0$.

---

19. Pour tout x réel, on pose $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}$.

a. Montrer que la fonction g est définie, et de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que, pour tout p entier naturel, on a $\left|g^{(p)}(0)\right| \geq p^{2p}\, e^{-p}$.

c. En déduire que la série de Taylor de g a un rayon de convergence nul.

- -

a. Posons $g_k(x) = e^{-k(1-ikx)} = e^{-k}\, e^{ik^2 x}$ pour $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Les fonctions g_k sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $g_k^{(p)}(x) = (ik^2)^p\, e^{-k}\, e^{ik^2 x}$, on a donc $\left|g_k^{(p)}(x)\right| = k^{2p} e^{-k}$ (indépendant de x), donc $\|g_k^{(p)}\|_\infty = k^{2p} e^{-k}$. C'est le terme général d'une série convergente puisque, par croissances comparées, $k^2\, k^{2p} e^{-k} = k^{2p+2} e^{-k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On a prouvé la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de toutes les séries dérivées $\displaystyle\sum_{k\geq 0} g_k^{(p)}$. Le théorème de dérivation des sommes de séries de fonctions s'applique donc, on en déduit que g est d'abord définie sur $\mathbb{R}$ (puisque cela marche aussi pour $p = 0$), puis de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k^{(p)}(x) = i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p}\, e^{-k}\, e^{ik^2 x}\ .$$

b. En particulier, $g^{(p)}(0) = i^p \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p}\, e^{-k}$ et, les termes de cette dernière somme étant tous positifs,

$$\left|g^{(p)}(0)\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p}\, e^{-k}\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p}\, e^{-k} \geq p^{2p}\, e^{-p}\ .$$

c. On a donc $\left|\dfrac{g^{(p)}(0)}{p!}\right| \geq \dfrac{p^{2p}\,e^{-p}}{p!}$. Posons $a_p = \dfrac{p^{2p}\,e^{-p}}{p!}$. Alors, après simplifications, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\left|\frac{a_{p+1}x^{p+1}}{a_p x^p}\right| = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{2p}(p+1)\,|x| \underset{p\to+\infty}{\sim} e\,p\,|x| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\ .$$

Par la règle de d'Alembert, la série entière $\sum\limits_{p\geq 0} a_p x^p$ ne converge donc que pour $x = 0$, autrement dit son rayon de convergence est nul. Par comparaison, la série de Taylor de g, à savoir $\sum\limits_{p\geq 0} \dfrac{g^{(p)}(0)}{p!}x^p$ a aussi un rayon de convergence nul. La fonction g, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, n'est donc développable en série entière sur aucun intervalle $]-r, r[$ avec $r > 0$.

---

20. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$.

En déduire la relation

$$\forall x \in\,]-1,1[\qquad \text{Arcsin}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ .$$

Cette dernière relation reste-t-elle vraie pour $x = -1$ et $x = 1$?

- -

En utilisant le DSE de $(1+x)^\alpha$, valable dans $]-1,1[$, on obtient

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}(-x^2)^n\ ,$$

soit $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,x^{2n}$. Le rayon de convergence de cette série entière est 1, on peut le revérifier par d'Alembert. Par intégration terme à terme, pour x appartenant à l'intervalle de convergence $]-1,1[$, on a

$$\text{Arcsin}\, x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \textbf{(*)}\ .$$

Posons $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}$. La formule de Stirling donne $u_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}$, donc la série $\sum a_n$ converge. Cela garantit la convergence normale sur $[-1,1]$ de la série entière $\sum a_n x^{2n+1}$ et donc la continuité de sa somme sur cet intervalle $[-1,1]$. La fonction arcsinus étant elle aussi continue sur $[-1,1]$, la relation d'égalité **(*)**, prouvée sur $]-1,1[$ ouvert, reste valable sur $[-1,1]$ fermé. On en déduit ainsi la relation

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}\ .$$

---

21. Pour x réel non nul, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

b. Montrer que la fonction f, ainsi prolongée, est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et expliciter son développement.

- -

a. Une solution parmi beaucoup d'autres. Pour $t \in [0, \pi]$, on a $1 - t \leq \cos(t) \leq 1$. En effet, la deuxième inégalité est bien connue, et $1 - \cos(t) = \displaystyle\int_0^t \sin(u)\,\mathrm{d}u \geq 0$ (l'intégrande est positif), ce qui donne la première. Donc, pour $x \in]0, \pi]$, on a

$$\ln(2) - x = \int_x^{2x} \frac{1-t}{t}\,\mathrm{d}t \leq f(t) = \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(2)\ .$$

Le théorème d'encadrement donne $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln(2)$. Enfin, la fonction f est paire puisque

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{2x} \frac{\cos(-u)}{-u}\,(-\mathrm{d}u) = \int_x^{2x} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u = f(x)\ .$$

On a donc aussi $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \ln(2)$. On prolonge donc f par continuité en 0 en posant $f(0) = \ln(2)$.

b. Pour tout x réel, on a $f(x) - \ln(2) = \displaystyle\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t$, en posant $g(t) = \dfrac{\cos(t) - 1}{t}$ pour t non nul et $g(0) = 0$. Cette fonction g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ puisque

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \qquad \frac{\cos(t) - 1}{t} = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n)!}\ ,$$

et finalement $g(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n)!}$ pour tout t réel. Les primitives de g s'obtiennent alors par primitivation terme à terme sur l'intervalle de convergence qui est $\mathbb{R}$. En notant par exemple G la primitive de g qui s'annule en 0, on a

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n) \times (2n)!}\ .$$

Enfin, $f(x) = \ln(2) + G(2x) - G(x) = \ln(2) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (4^n - 1)\, x^{2n}}{(2n) \times (2n)!}$.

---

22. On fixe $a \in [0, 1[$. Pour x réel, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{sh}(a^n\, x)$.

a. Montrer que la fonction S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Trouver une relation entre $S(ax)$ et $S(x)$.

c*. En déduire que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et expliciter ce développement.

23.a. Former de deux façons le développement en série entière de

$$f : x \mapsto e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

b. En déduire la relation

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \binom{2n}{n} = \frac{4^n}{2n+1}\ .$$

- -

a. • Pour tout t réel, on a $e^{t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n!}$. On sait que l'on peut primitiver terme à terme la fonction somme d'une série entière sur son intervalle de convergence (ici, l'ensemble $\mathbb{R}$), on en déduit que l'expression de la primitive s'annulant en zéro est

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}\ .$$

Par ailleurs, pour tout réel x, on a aussi $e^{-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$. Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} \frac{(-1)^p}{p!\,q!\,(2q+1)} x^{2p} x^{2q+1} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!\,k!\,(2k+1)} \right) x^{2n+1}\ .$$

• Par ailleurs, on peut avoir la curiosité de dériver f, on obtient alors $f'(x) = -2x\,f(x) + 1$, donc f est solution de l'équation différentielle **(E)**: $y' + 2xy = 1$. Recherchons alors les solutions développables en série entière de cette équation **(E)**. Si on pose $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur un intervalle $]-r, r[$ avec $r > 0$ (que l'on déterminera a posteriori), alors $y' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, soit $y' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$, et $xy = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n$. En réinjectant dans **(E)**, on a

$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big((n+1) a_{n+1} + 2a_{n-1} \Big) x^n = 1\ ,$$

ce qui impose (par unicité du DSE): $a_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = -\dfrac{2}{n+1} a_{n-1}$. La fonction f vérifie de plus la condition initiale $y(0) = 0$ qui donne $a_0 = 0$ si on suppose

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-r, r[$. Tout ceci permet d'obtenir les a_n de proche en proche, à savoir $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \dfrac{(-1)^p 2^p}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p+1)} = \dfrac{(-1)^p\, 4^p\, p!}{(2p+1)!}$ pour tout p entier naturel.

On fait maintenant une petite synthèse: si l'on considère les coefficients a_n obtenus ci-dessus, on pose $u_p(x) = a_{2p+1} x^{2p+1}$, on a alors (pour $x \neq 0$),

$$\left|\frac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)}\right| = \frac{4}{(2p+1)(2p+3)} x^2 \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0\ ,$$

on en déduit que la série entière $\sum_{p \geq 0} u_p(x) = \sum_{p \geq 0} a_{2p+1} x^{2p+1}$ converge pour tout x réel, elle a donc un rayon de convergence infini, et si on pose $s(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction somme (d'après le calcul précédent) est solution du problème de Cauchy constitué de l'équation **(E)** et de la condition initiale $y(0) = 0$. Elle coïncide donc avec f qui est aussi solution de ce problème de Cauchy. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, 4^n\, n!}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}\ .$$

b. Par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients obtenus par les deux méthodes, cela donne

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!\, k!\, (2k+1)} = \frac{(-1)^n\, 4^n\, n!}{(2n+1)!}\ ,$$

soit encore

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, \frac{(2n)!}{n!\,(n-k)!\,k!} = \frac{4^n}{2n+1}\ ,$$

soit encore... la relation demandée.

Autres exercices.

24*. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence infini. On suppose que cette série entière converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Montrer que les a_n sont nuls à partir d'un certain rang.

- -

Posons $u_n(x) = a_n x^n$, soit $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ la somme partielle d'ordre n de la série entière, c'est une fonction polynomiale. Si on suppose que la série entière converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors la suite de fonctions (P_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f (qui est la somme de la série entière), mézalor $u_n = P_n - P_{n-1}$ converge uniformément vers 0 puisque

$$\|u_n\|_\infty = \big\|(f-P_{n-1})-(f-P_n)\big\|_\infty \leq \|f-P_{n-1}\|_\infty + \|f-P_n\|_\infty \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0\ .$$

Donc, pour n assez grand ($n \geq N$), $\|u_n\|_\infty < +\infty$, i.e. u_n est bornée sur $\mathbb{R}$, donc u_n est constante (car c'est une fonction polynomiale), donc u_n est nulle puisqu'elle est de la forme $x \mapsto a_n x^n$ avec $n \geq 1$, donc $a_n = 0$. La fonction somme $f = P_N$ est donc une fonction polynomiale.

---

25. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M\ .$$

Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

- -

La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)}{n!}\, \mathrm{d}t\ .$$

Pour $x > 0$, on majore la valeur absolue:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \int_0^x \frac{M\,(x-t)^n}{n!}\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{M\,(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_{t=0}^{t=x} = M\, \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Pour $x < 0$, le lecteur courageux adaptera. On obtient dans tous les cas

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq M\, \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

et le majorant, pour x réel fixé, tend vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$. Cela prouve que, pour tout x réel, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge et a pour somme $f(x)$. Donc f est, sur $\mathbb{R}$ tout entier, somme de sa série de Taylor en zéro ; autrement dit, f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

---

26. Calculer $\displaystyle S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

On pourra utiliser le développement en série entière de $\operatorname{Arctan} x$.

- -

La convergence (absolue) de la série proposée est immédiate.

On observe que $\displaystyle S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \mathrm{d}x$. On se demande alors s'il est possible d'intervertir série et intégrale. **Attention! La série entière** $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ **a pour rayon de**

convergence 1. Le cours sur les séries entières permet juste d'affirmer que l'on peut intervertir série et intégrale sur tout segment inclus dans l'intervalle de convergence $]-1,1[$, **ce qui n'est pas le cas du segment** $[0,1]$. Il faut donc faire les choses à la main (*on peut aussi essayer avec les pieds, mais c'est un peu plus compliqué*).

Si l'on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, alors les fonctions u_n sont continues sur $[0,1]$, et il y a convergence uniforme sur cet intervalle de la série de fonctions $\sum u_n$. En effet, pour $x \in [0,1]$ fixé, la suite $\left(\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0, le théorème spécial des séries alternées permet donc d'affirmer que le reste $r_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ vérifie $|r_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)|$, donc $|r_n(x)| \leq \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \dfrac{1}{2n+3}$, donc $\|r_n\|_{\infty,[0,1]} \leq \dfrac{1}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. L'interversion est donc justifiée, cela donne

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[x\ \mathrm{Arctan}(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x\ \mathrm{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}\ . \end{aligned}$$

---

27. Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels, convergente, de somme S. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ sa somme partielle d'ordre n, et $R_n = S - S_n$ le reste d'ordre n. Enfin, pour tout réel x, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!}\,x^n$.

a. Montrer que l'on peut écrire $S - e^{-x} f(x) = e^{-x}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{R_n}{n!}\,x^n\right)$.

b. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\,f(x) = S$.

---

28. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On pose $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $|z| < R$.

a. Soit r tel que $0 < r < R$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}\quad a_p r^p = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})\,e^{-ipt}\,\mathrm{d}t$.

En déduire que $|a_p| \leq \dfrac{M(r)}{r^p}$, où $M(r) = \displaystyle\max_{|z|=r} |f(z)|$.

b. *Application.* Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. On suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

- -

a. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $0 < r < R$, on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\,e^{it})\,e^{-ipt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-p)t}\Big)\,\mathrm{d}t$.
Or, la série numérique à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geq 0}|a_n|r^n$ converge puisque $0 < r < R$, ce qui entraîne la convergence normale sur le segment $[0, 2\pi]$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$, avec $u_n(t) = a_n r^n\,e^{i(n-p)t}$; on peut donc intégrer terme à terme, ce qui donne

$$\int_0^{2\pi} f(r\,e^{it})\,e^{-ipt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\,a_p\,r^p\ .$$

En effet, si k est un entier relatif, on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ikt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k=0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. On a ainsi obtenu la **formule intégrale de Cauchy** qui permet de déterminer les coefficients a_p d'une série entière si l'on connaît l'expression de la fonction somme sur le cercle de centre O et de rayon, avec $r \in]0, R[$ donné : $a_p = \dfrac{1}{2\pi\,r^p}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\,e^{it})\,e^{-ipt}\,\mathrm{d}t$. Comme

$$\left|\int_0^{2\pi} f(r\,e^{it})\,e^{-ipt}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{2\pi} \left|f(r\,e^{it})\right|\mathrm{d}t \leq 2\pi\,M(r)\ ,$$

on déduit une majoration des coefficients : $|a_p| \leq \dfrac{M(r)}{r^p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $r \in]0, R[$.

b. On suppose $R = +\infty$ et $\forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leq M$, alors $|a_p| \leq \dfrac{M}{r^p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $r \in \mathbb{R}_+^*$. Fixons p entier naturel non nul ; en passant à la limite ($r \to +\infty$) dans l'inégalité ci-dessus, on obtient $|a_p| \leq 0$. Donc $a_p = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et $f(z) = a_0$: f est une fonction constante.

---

29. Pour α réel et n entier naturel non nul, on pose $\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, par convention $\dbinom{\alpha}{0} = 1$. Prouver la **relation de Chu-Vandermonde**:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}\ .$$

- -

On sait que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$(1+x)^a = \sum_{p=0}^{+\infty}\binom{a}{p}x^p \quad \text{et} \quad (1+x)^b = \sum_{q=0}^{+\infty}\binom{b}{q}x^q\ .$$

Puis, toujours dans $]-1, 1[$, on a $(1+x)^{a+b} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{a+b}{n}x^n$, mézôssi (par produit de Cauchy):

$$(1+x)^{a+b} = (1+x)^a(1+x)^b = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\sum_{p+q=n}\binom{a}{p}\binom{b}{q}\right]x^n\ .$$

Par identification des coefficients (légitime car il y a unicité du développement en série entière), on a donc

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{p+q=n}\binom{a}{p}\binom{b}{q} = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}\ .$$

Exercices avec Python.

30. La suite de Fibonacci (a_n) est définie par

$$a_0 = 0 \quad ; \quad a_1 = 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\ .$$

a. Écrire une fonction retournant a_n, prenant n comme argument.

b. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout x tel que cette série entière converge. Représenter la somme partielle d'indice 20 de cette série entière dans l'intervalle $[0\ ;\ 0,6]$.

c. Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, où R est le rayon de convergence, on a $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$.

d. Représenter sur le même graphique la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1-x-x^2}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 0,6]$.

---

31. Pour tout n entier naturel, on pose $D_n = \big\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid 2p+3q = n\big\}$, et $d_n = \mathrm{Card}(D_n)$.

a. Écrire une fonction Python prenant comme argument un entier naturel n et retournant la liste des éléments de l'ensemble D_n.

b. Avec Python, comparer d_n et d_{n+6} pour $n \in [\![0, 184]\!]$. Faire une conjecture.

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}$.

c. Montrer que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

d. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ ce développement en série entière. Écrire une fonction en langage Python qui calcule c_n, prenant n comme argument. Calculer c_n pour $n \in [\![0, 199]\!]$.

e. Vérifier expérimentalement la relation $c_n = d_n$, puis la démontrer.

f. En considérant la fonction $g : x \mapsto (1-x^6)\, f(x) - \dfrac{1}{1-x}$, prouver la conjecture émise à la question **b.**

g. Représenter sur un même graphique, sur l'intervalle $[0\ ;\ 0,95]$, la fonction f et la somme partielle d'indice 20 de la série entière $\sum c_n x^n$.

- -

a. *cf.* script.

b. *cf.* script. On conjecture que $d_{n+6} = d_n + 1$ pour tout n.

c. Les fonctions $u : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2} = (1-x^2)^{-1}$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^3} = (1-x^3)^{-1}$ sont DSE sur $]-1,1[$. Par produit de Cauchy, il en est donc de même de $f = uv$. Pour le calcul, précisons:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \ , \quad \text{avec} \quad a_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \bmod 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

De même,

$$v(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{3k} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \ , \quad \text{avec} \quad b_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \bmod 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Enfin, pour $|x| < 1$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ avec $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

d. *cf.* script.

e. *cf.* script. On a $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, mais a_k et b_{n-k} prenant leurs valeurs dans $\{0,1\}$, il en est de même de leur produit, qui vaut alors 1 si et seulement si $a_k = 1$ et $b_{n-k} = 1$, donc si et seulement s'il existe p et q entiers naturels tels que $k = 2p$ et $n - k = 3q$. Donc c_n est égal au nombre d'entiers k dans $[\![0,n]\!]$ tels que $2 \mid k$ et $3 \mid n-k$, c'est aussi le nombre de couples (p,q) dans $[\![0,n]\!]^2$, donc dans $\mathbb{N}^2$, tels que $2p + 3q = n$. Ainsi $c_n = d_n$.

f. D'une part, on calcule, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$,

$$g(x) = \frac{1-x^6}{(1-x^2)(1-x^3)} - \frac{1}{1-x} = \frac{(1-x^6) - (1+x)(1-x^3)}{(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{-x^6 + x^4 + x^3 - x}{x^5 - x^3 - x^2 + 1} = -x \ .$$

D'autre part, sur $]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - x^6 f(x) - \frac{1}{1-x} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+6} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum_{n=6}^{+\infty} c_{n-6}\, x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{5} (c_n - 1) x^n + \sum_{n=6}^{+\infty} (c_n - c_{n-6} - 1) x^n \ , \end{aligned}$$

et ceci doit aussi être égal à $-x = 0\, x^0 - 1\, x^1 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} 0\, x^n$ sur $]-1,1[$. Par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients, ce qui donne notamment $c_n - c_{n-6} - 1 = 0$ pour tout $n \geq 6$, soit $c_{n+6} = c_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

g. *cf.* script.