DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 4
COMMENTAIRES
PSI2 2023-2024

EXERCICE

A.2. ATTENTION AUX MANIPULATIONS D'INÉGALITÉS!!

De $0 < a_n \leq 2^n$ et $0 < a_{n+1} \leq 2^{n+1}$, on ne déduit pas que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{2^{n+1}}{2^n}$.

B.2. On ne définit pas une fonction par $\varphi : u_n \mapsto 1 + \dfrac{1}{u_n}$, l'écriture composée u_n ne pouvant être acceptée comme nom de variable (en langage Python par exemple, une variable ne sera jamais nommée `u(n)`). On peut définir φ par $x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}$, ou $t \mapsto 1 + \dfrac{1}{t}$, ou $u \mapsto 1 + \dfrac{1}{u}$, etc.

B.3. La pratique de l'étude de suites récurrentes $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ est sérieusement à revoir! Le lien entre les variations de la fonction φ et le comportement de la suite (u_n) était pourtant une question de cours du premier programme de colle de cette année! Si φ est décroissante sur un intervalle stable par exemple, alors les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires, mais ce n'est pas un "théorème des suites extraites" (?) à apprendre, c'est un résultat dont vous devez donner la démonstration.

B.4. Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont toutes deux convergentes, pourquoi donc auraient-elles la même limite ?

La suite (u_n) ici n'est pas monotone, puisqu'elle a deux suites extraites de sens de variation contraires.

PROBLÈME

1. Le fait que 0 est valeur propre de multiplicité 2 au moins n'est pas toujours bien exploité: il signifie que le polynôme caractéristique est factorisable par X^2.

4. Il s'agit de construire une **base** de $\mathbb{C}^3$ dans laquelle u_A est représenté par la matrice T. Une base est notamment une famille libre, il est donc aberrant de voir apparaître deux fois le même vecteur (ou deux vecteurs visiblement proportionnels) pour la construire!! Autrement dit, il est aberrant de voir une matrice "de passage" P visiblement non inversible (par exemple avec deux colonnes proportionnelles, ou encore avec une colonne nulle!).

J'ai lu dans plusieurs copies que, comme $\chi_A = \chi_T$, alors A et T sont semblables, **mais ce résultat est faux.** Par exemple, la matrice nulle et une matrice nilpotente (non nulle) ont toutes deux pour polynôme caractéristique X^n, elles ne sont pas semblables pour autant.

5. Des confusions fréquentes entre la dimension d'un espace vectoriel de matrices et le rang d'une matrice donnée: la dimension de $\mathcal{C}(T)$, espace vectoriel constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & f \\ g & 0 & i \end{pmatrix}$, est le nombre de "constantes arbitraires" à fixer pour déterminer une de ces matrices, soit visiblement 5. On peut aussi expliciter une base de $\mathcal{C}(T)$. On construit ensuite un isomorphisme entre $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(T)$.

6. Il est bien de noter que, **si** une matrice R vérifie $R^2 = T$, **alors** elle commute avec T... mais il est tout de même assez évident que la réciproque est fausse!

8. Le fait que X^p est un polynôme annulateur de A fournit seulement l'inclusion $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$, il faut donc aussi prouver que $0 \in \mathrm{Sp}(A)$, ou que $\mathrm{Sp}(A) \neq \emptyset$.

9. La seule solution est la matrice nulle... et c'est assez immédiat, il ne faut pas remplir des pages pour répondre à une telle question!

10. Pour passer de $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ à $\chi_A = X^n$, il serait bien de rappeler que le polynôme caractéristique doit être unitaire de degré n, et ici scindé puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

12. Question plus subtile, assez peu de bonnes réponses.

13.c. Question plus subtile aussi, très peu de bonnes réponses.

14.a. Commencer par montrer que A^{-1} et N commutent.

15.b. Peu de bonnes réponses, alors qu'il s'agit simplement de constater que les deux déterminants sont nuls. Il m'est arrivé de lire dans quelques copies que $\det(M^p) = p \cdot \det(M)$!!??

17. Question très élémentaire, mais qui a parfois été l'objet de développements longs et maladroits.

18. Beaucoup de résultats faux (des indices décalés).