Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont réelles discrètes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que X **admet un moment d'ordre** k si X^k est d'espérance finie.

Soit α un réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire réelle discrète X **admet un moment exponentiel d'ordre** α si la variable aléatoire $e^{\alpha|X|}$ est d'espérance finie.

On pourra utiliser sans démonstration les deux propriétés suivantes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors:

- si f est une application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, les variables $f(X_1), \cdots, f(X_n)$ sont mutuellement indépendantes ;
- si les n variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont d'espérance finie, alors la variable aléatoire $\prod_{i=1}^{n} X_i$ est d'espérance finie et $\mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i)$.

On rappelle que, si la variable Y est d'espérance finie, et si $|X| \leq Y$, alors X est aussi d'espérance finie.

PARTIE A. Préliminaires (deux questions indépendantes).

1.a. Donner le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique et celui de la fonction $t \mapsto e^{t^2/2}$. On donnera le rayon de convergence de ces deux séries entières.

b. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}_+$, et admettant une limite finie en $+\infty$.

a. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

b. Soient k un entier naturel et γ un réel strictement positif. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(t) = t^k\, e^{-\gamma t}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

PARTIE B. Transformée de Laplace d'une variable aléatoire.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. On note I_X l'ensemble des réels t tels que la variable e^{tX} est d'espérance finie et, pour tout $t \in I_X$, on pose

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) .$$

La fonction $\mathcal{L}_X$ est la **transformée de Laplace** de la variable X.

3.a. Montrer que $0 \in I_X$, et que I_X est un intervalle de $\mathbb{R}$.

b. Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, quel lien y a-t-il entre $\mathcal{L}_X$ et la fonction génératrice G_X ?

4. Pour chacune des variables aléatoires suivantes, déterminer l'intervalle I_X et calculer $\mathcal{L}_X(t)$ pour $t \in I_X$.

a. X suivant une loi de Poisson de paramètre λ, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

b. X suivant une loi géométrique de paramètre p, avec $p \in]0,1[$.

c. X suivant une loi binomiale de paramètres n et p, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

d. X suivant une loi zéta de paramètre x, avec $x > 1$ (*cf.* exo 20 de la feuille "probabilités"). Dans ce dernier cas, on donnera juste l'expression de $\mathcal{L}_X(t)$ comme somme d'une série.

PARTIE C. Majoration de $\mathcal{L}_X(t)$ pour une variable centrée à valeurs dans $[-1,1]$.

5. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g_a(x) = \frac{1-x}{2a} + \frac{a\,(1+x)}{2} - a^x .$$

Calculer $g_a(-1)$ et $g_a(1)$, puis montrer que la fonction g_a est positive sur $[-1,1]$.

6. En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in [-1,1] \qquad e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}\, e^{-t} + \frac{1+x}{2}\, e^{t}\ .$$

7. Dans cette question, X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[-1,1]$.

a. Montrer que $I_X = \mathbb{R}$, et que X admet un moment à tout ordre k, $k \in \mathbb{N}^*$.

b. On suppose X centrée, i.e. $\mathrm{E}(X) = 0$. Prouver l'inégalité

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad \mathcal{L}_X(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}\ ,$$

puis montrer que cette inégalité est en fait vraie pour tout t réel.

PARTIE D. La loi forte des grands nombres dans un cas particulier.

Dans cette partie, on note X une variable aléatoire discrète, centrée, à valeurs dans $[-1,1]$, et on introduit une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

8. Soient $t > 0$ et $\varepsilon > 0$. Avec l'inégalité de Markov, montrer que

$$P(S_n \geq \varepsilon) = P\big(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}\big) \leq \big(\mathcal{L}_X(t)\big)^n\, e^{-tn\varepsilon}\ .$$

9. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$. Étudier les variations de la fonction $t \mapsto e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$. En déduire les inégalités

$$P(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}} \qquad \text{puis} \qquad P\big(|S_n| \geq \varepsilon\big) \leq 2\, e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}\ .$$

10. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, montrer la convergence de la série $\sum P\big(|S_n| > \varepsilon\big)$.

11. Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ donnés, on pose $B_n(\varepsilon) = \displaystyle\bigcup_{k\geq n} \Big\{\omega \in \Omega\ ;\ \big|S_k(\omega)\big| > \varepsilon\Big\}$.

Montrer que $B(\varepsilon) = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)$ est un événement négligeable.

12. Soit l'ensemble $A = \big\{\omega \in \Omega \mid \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(\omega) = 0\big\}$. Montrer que $A = \overline{\displaystyle\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} B\Big(\frac{1}{p}\Big)}$.

13. En déduire que la suite (S_n) converge presque sûrement vers 0, c'est-à-dire que A est un événement presque sûr.

PARTIE E. Fonction génératrice des moments.

Soit α un réel strictement positif. Dans cette partie, on considère une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment exponentiel d'ordre α.

14. Montrer que l'intervalle I_X contient le segment $[-\alpha, \alpha]$.

15. En utilisant une des questions préliminaires, montrer que X admet un moment à tout ordre k avec $k \in \mathbb{N}^*$.

16. Montrer que la transformée de Laplace $\mathcal{L}_X$ est continue sur le segment $[-\alpha, \alpha]$.

17. Montrer que la fonction $\mathcal{L}_X$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-\alpha, \alpha[$.

18. Que vaut $\mathcal{L}_X^{(k)}(0)$ pour k entier naturel non nul ?

La transformée de Laplace $\mathcal{L}_X$ *est aussi appelée* **fonction génératrice des moments** *de la variable aléatoire* X.