Calcul de dérivées partielles

1. On pose $f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, et $f(0,0)=0$. Montrer que l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer l'équivalence entre les assertions:

(1) : $\forall t\in\mathbb{R}\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\qquad f(x+t,y+t)=f(x,y)$;

(2) : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$

3. Expression du laplacien en coordonnées polaires.

Soit $f:(x,y)\mapsto f(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, soit $g:(r,\theta)\mapsto f(r\cos\theta,r\sin\theta)$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ à l'aide des dérivées partielles de g.

4. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telle que $f(x,y)=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, et $f(0,0)=0$.

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

b. Est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

Équations aux dérivées partielles

5.a. En utilisant le changement de variables $\{u=x+y\ ,\ v=x-y\}$, résoudre, sur $\mathbb{R}^2$, l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathbf{E})\quad:\qquad \frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}+3(x-y)\,f=0\ .$$

b. Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe une unique solution de **(E)** vérifiant $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x,0)=g(x)$ et l'expliciter.

6. En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telles que

$$y\,\frac{\partial f}{\partial x}-x\,\frac{\partial f}{\partial y}=f\ .$$

7. Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, l'équation aux dérivées partielles

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x}+y\,\frac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

8. Soit α un réel. Une fonction $f:(\mathbb{R}_+^*)^2\to\mathbb{R}$ est dite **homogène de degré** α si elle vérifie

$$\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2\quad\forall t\in\mathbb{R}_+^*\qquad f(tx,ty)=t^\alpha\,f(x,y)\ .$$

a. Soit $f:(\mathbb{R}_+^*)^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si elle est solution de l'équation aux dérivées partielles $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}=\alpha\,f$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

On pourra considérer $g:t\mapsto f(tx,ty)$, *avec* $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ *fixé.*

b. Soit $f:(\mathbb{R}_+^*)^2\to\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, homogène de degré α. Montrer que l'on a

$$x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\alpha\,(\alpha-1)\,f\ .$$

9. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que, en posant $\varphi(x,y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, on ait
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}\ .$$

10. Résoudre, dans l'ouvert $U = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > |y|\big\}$, l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}\ .$$
On pourra poser $\begin{cases} u &= x + y \\ v &= x - y \end{cases}$.

11. En posant $\begin{cases} u &= xy \\ v &= \dfrac{x}{y} \end{cases}$, résoudre sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ l'équation aux dérivées partielles
$$x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\ .$$

12. Soient a, b, c trois réels tels que $ac < 0$. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que
$$(\mathbf{E})\ :\qquad a\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + c\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\ .$$
Indication. On pourra utiliser un changement de variables affine du type $\begin{cases} u &= \lambda\,x + y \\ v &= \mu\,x + y \end{cases}$, où λ et μ sont deux réels convenablement choisis.

13. Trouver les fonctions $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que, en posant $f(x,y,z) = \varphi(r)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, la fonction f vérifie sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + kf = 0\ ,$$
où k est un réel donné.

14. On pose $S(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\,\sin t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que S est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\quad x\,S''(x) + S'(x) + x\,S(x) = 0$.

c. Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$. Pour $(x,y) \in U$, on pose $\varphi(x,y) = S\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que $\Delta\varphi + \varphi = 0$, où Δ est le laplacien.

Recherche d'extremums

15. Déterminer les extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) de

$f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

$g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy - 2y + 5$

$h : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$

$k : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$

$l : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$

16. Rechercher les extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x, y) \mapsto x\, e^y + y\, e^x$.

17. Extremums locaux et globaux de $f : (x, y) \mapsto xy - \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{1}{x}$ sur $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

18. Soit $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\,,\ y > 0\,,\ x + y \leq 1\big\}$.

a. Montrer que D est une partie fermée bornée du plan (un "compact").

b. Soient $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^a\, y^b\, (1 - x - y)^c$. Montrer que f est continue sur D.

c. Déterminer $\displaystyle\max_{(x,y)\in D} f(x, y)$.

19. Déterminer $M = \displaystyle\max_{(x,y)\in K} \big(\sin x\, \sin y\, \sin(x + y)\big)$, avec $K = \Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]^2$.

20. Rechercher les extremums locaux de $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ sur $\mathbb{R}^3$.

21. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ une **fonction convexe**, i.e. telle que

$$\forall (x, y) \in U^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1] \qquad f\big((1 - \lambda)x + \lambda y\big) \leq (1 - \lambda)\, f(x) + \lambda\, f(y)\ ,$$

et de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que tout point critique de f est un minimum global.

22*. Soit E un espace euclidien, soit $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$, soit $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur fixé. Pour tout $x \in E$, on pose $g(x) = \big(f(x) \mid x\big) - (u|x)$. Montrer que g admet un unique point critique et que g présente en ce point un minimum global. *On utilisera une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u.*

Courbes et surfaces.

23. Soit la surface $\mathcal{S} : x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Existe-t-il des points de $\mathcal{S}$ en lesquels la normale est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v} = (1, 2, 3)$?

24. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $x^2 - y^2 + z^2 = 1$. Déterminer les points de $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent est parallèle au plan $P\ :\ 2x + y - z = 0$.

25. Soit la surface $\mathcal{S}$ d'équation $3x^2 + y^2 + z^2 - 4yz = 0$. Trouver les plans tangents à $\mathcal{S}$ passant par le point $A\ (1, 1, 0)$.

26. Déterminer l'espace tangent en $(0, 0, 0)$ à

$$\mathcal{E} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4xy + 2xz + 4y - z = 0\ ,\ xy + 2x - z = 0\right\}\ .$$

---

27. Un petit problème: unicité de la solution de l'équation de la chaleur avec condition initiale.

On considérera, dans le plan $\mathbb{R}^2$, le demi-plan fermé $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, ainsi que son intérieur qui est le demi-plan ouvert $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Une fonction $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π-périodique, étant donnée, on dira qu'une fonction de deux variables $U : \Pi \to \mathbb{R}$ est **solution du problème** $\mathcal{P}(\Phi)$ si elle est continue sur Π, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω, et si elle vérifie

$$\begin{cases} \forall (x,t) \in \Omega & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,t) & (\mathbf{1}) \\ \forall t \in \mathbb{R}_+ & U(0,t) = 0 & (\mathbf{2}) \\ \forall x \in \mathbb{R} & U(x,0) = \Phi(x) & (\mathbf{3}) \\ \forall (x,t) \in \Pi & U(x+2\pi,t) = U(x,t) & (\mathbf{4}) \end{cases}\ .$$

Pour la culture, l'équation aux dérivées partielles **(1)** est l'**équation de la chaleur**.

Supposons que deux fonctions $U_1 : \Pi \to \mathbb{R}$ et $U_2 : \Pi \to \mathbb{R}$ soient solutions du problème $\mathcal{P}(\Phi)$. Soit $V = U_2 - U_1$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$G(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} V(x,t)^2\, \mathrm{d}x\ .$$

1. Montrer que la fonction G est continue sur $\mathbb{R}_+$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Prouver la relation

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad G'(t) = -\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x,t)\right)^2 \mathrm{d}x\ .$$

3. En déduire que G est nulle sur $\mathbb{R}_+$, puis que V est nulle sur Π.

Interprétation: la condition **(3)** *signifie qu'à l'instant $t = 0$, on connaît la température $\Phi(x)$ en chaque point d'abscisse x d'une tige rectiligne et on suppose, pour la commodité du calcul, que cette fonction Φ est 2π-périodique ("périodicité spatiale", condition* **(4)***). La condition* **(2)** *signifie par ailleurs que la température est maintenue constante, à 0°C par exemple, en le point d'abscisse 0 de la tige. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, le réel $U(x,t)$ est alors la température au point d'abscisse x de la tige à l'instant t. En admettant l'* **existence** *d'une solution au problème $\mathcal{P}(\Phi)$, cet exercice montre que l'évolution temporelle de la température en chaque point de la tige est entièrement déterminée.*