Notion de probabilité. Espaces probabilisés.

1. Un animal erre entre trois points d'eau A, B, C. À l'instant $t = 0$, il est au point A. Si, à l'instant n, il est en l'un des trois points A, B ou C, il en part alors et sera à l'instant $n+1$ de façon équiprobable en l'un des deux autres points d'eau. Pour n entier naturel, on note a_n la probabilité pour que l'animal soit au point A à l'instant n. On définit de même b_n et c_n.

a. Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

b. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'elle est diagonalisable et, en moins d'une minute, trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

c. Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n.

- -

a. Si l'on note A_n l'événement: "à l'instant n, l'animal se trouve au point A", et de même, B_n et C_n, on a alors, par la formule des probabilités totales,

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)\,P(A_n) + P(A_{n+1}|B_n)\,P(B_n) + P(A_{n+1}|C_n)\,P(C_n)\ ,$$

soit $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n + c_n)$ et, de même, $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + c_n)$ et $c_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$.

b. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable, on note que $M = A + \dfrac{1}{2}I_3 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1, et que $\mathrm{Ker}(M) = E_0(M) = E_{-\frac{1}{2}}(A)$ est le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 0$. En utilisant (par exemple) la trace, on voit que 1 est valeur propre de A, le sous-espace propre associé étant la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On peut par exemple utiliser le fait que, la matrice A étant symétrique réelle, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. On déduit facilement que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}\Big(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1\Big)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c. On introduit le vecteur-colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Alors $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout n entier naturel, on a $X_{n+1} = AX_n$, d'où classiquement $X_n = A^n X_0$. On a $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A^n = P\ D^n\ P^{-1} = \begin{pmatrix} x_n & y_n & y_n \\ y_n & x_n & y_n \\ y_n & y_n & x_n \end{pmatrix}$, avec $x_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times \Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^n$ et $y_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} \times \Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^n$. Enfin, $X_n = A^n X_0$ est la première colonne de A^n, donc

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n \qquad \text{et} \qquad b_n = c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\ .$$

2. On effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie. La probabilité d'obtenir "Face" à chaque lancer est $p \in]0,1[$.

Pour tout $n \geq 1$, on considère l'événement U_n: "on obtient deux Face de suite, pour la première fois, aux lancers numéros n et $n+1$", et on pose $u_n = P(U_n)$.

Notons r_n la probabilité qu'au cours des n premiers lancers, on ait obtenu au moins une fois deux Face consécutifs. Exprimer r_n en fonction des u_k. On considère aussi l'événement

E_n: "il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que l'on ait obtenu Face aux lancers numéros $2k-1$ et $2k$".

Montrer que $P(E_n) = 1-(1-p^2)^n$. Montrer que $P(E_n) \leq r_{2n}$. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$. Interpréter.

- -

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons F_n l'événement: "le n-ème lancer donne Face" et $P_n = \overline{F_n}$ l'événement contraire, à savoir: "le n-ème lancer donne Pile". On a donc $P(F_n) = p$.

Si, pour $n \geq 2$, on note R_n l'événement: "au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois deux Face consécutifs", on a $R_n = \bigsqcup_{k=1}^{n-1} U_k$ (réunion disjointe). Donc $r_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k$. On a ensuite $E_n = \bigcup_{k=1}^{n} (F_{2k-1} \cap F_{2k})$, donc $\overline{E_n} = \bigcap_{k=1}^{n} (\overline{F_{2k-1}} \cup \overline{F_{2k}}) = \bigcap_{k=1}^{n} \left(\overline{F_{2k-1} \cap F_{2k}}\right)$. Or, $P\left(\overline{F_{2k-1} \cap F_{2k}}\right) = 1-p^2$. Par indépendance, $P(\overline{E_n}) = (1-p^2)^n$, puis $P(E_n) = 1-(1-p^2)^n$. En termes d'événements, on a clairement $E_n \subset R_{2n}$, donc par croissance d'une probabilité, $P(E_n) \leq P(R_{2n}) = r_{2n}$. On a alors les inégalités $1-(1-p^2)^n \leq r_{2n} \leq 1$. Par encadrement, on déduit $\lim_{n\to+\infty} r_{2n} = 1$. La suite (r_n) étant croissante (sommes partielles d'une série à termes positifs), on déduit $\lim_{n\to+\infty} r_n = 1$, soit $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$. Il est donc presque sûr que l'on obtiendra "un jour" deux Face consécutifs.

Remarque. On peut obtenir ce dernier résultat un peu plus simplement. En effet, si l'on note E l'événement: "on obtient au moins une fois deux Face consécutifs", alors on a $E_n \subset E$ pour tout n. Donc $P(E_n) \leq P(E) \leq 1$ pour tout n. Comme $\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 1$, alors $P(E) = 1$.

3*. Problème de la ruine du joueur. Deux joueurs A et B s'affrontent en des parties indépendantes. Le joueur A dispose d'une fortune égale à n brouzoufs tandis que le joueur B dispose de $N-n$ brouzoufs. À chaque tour, le joueur A a la probabilité $p \in]0,1[$ de l'emporter et le joueur B a la probabilité complémentaire $q = 1-p$. Le joueur perdant cède alors un brouzouf au vainqueur. Le jeu continue jusqu'à la ruine d'un des deux joueurs. On note a_n la probabilité que le joueur A l'emporte lorsque sa fortune initiale vaut n.

a. Que valent a_0 et a_N ? Établir la formule de récurrence

$$\forall n \in [\![1, N-1]\!] \qquad a_n = p\, a_{n+1} + q\, a_{n-1}\ .$$

b. En déduire que la suite $(u_n)_{1\leq n\leq N}$ définie par $u_n = a_n - a_{n-1}$ est géométrique.

c. Calculer a_n en distinguant les cas $p = q$ et $p \neq q$.

d. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

- -

a. On a $a_0 = 0$ et $a_N = 1$.

Supposons que le joueur A possède une fortune initiale de n brouzoufs. Notons T l'événement: "le joueur A gagne le premier tour de jeu", et E_n l'événement: "le joueur A gagne la partie". On a alors, par la formule des probabilités totales, la relation

$$a_n = P(E_n) = P(E_n|T)\,P(T) + P(E_n|\overline{T})\,P(\overline{T})\ .$$

Or, $P(T) = p$, $P(\overline{T}) = q$, $P(E_n|T) = a_{n+1} = P(E_{n+1})$ puisque cela revient à démarrer la partie avec une fortune initiale de $n+1$ brouzoufs pour le joueur A, et de même $P(E_n|\overline{T}) = P(E_{n-1}) = a_{n-1}$. On obtient bien la relation

$$a_n = p\,a_{n+1} + q\,a_{n-1}\ .$$

b. La relation obtenue ci-dessus s'écrit aussi $p\,a_n + q\,a_n = p\,a_{n+1} + q\,a_{n-1}$, soit encore $q\,(a_n - a_{n-1}) = p\,(a_{n+1} - a_n)$, ou encore $u_{n+1} = \dfrac{q}{p}\,u_n$.

c. • Si $p = q = \dfrac{1}{2}$, alors la suite (u_n) est constante, ce qui signifie que (a_n) est une suite arithmétique. Avec $a_0 = 0$ et $a_N = 1$, on déduit $a_n = \dfrac{n}{N}$ pour $n \in [\![0, N]\!]$.

• Si $p \neq q$, i.e. si $p \neq \dfrac{1}{2}$, on a, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, $u_n = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{n-1} u_1 = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{n-1} a_1$, puis

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} u_k = a_1 \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^k = a_1\,\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\frac{q}{p}}\ .$$

Ensuite la relation $a_N = 1$ fournit $a_1 = \dfrac{1-\frac{q}{p}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}$. Finalement,

$$\forall n \in [\![0, N]\!] \qquad a_n = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}\ .$$

d. Un calcul symétrique montre que la probabilité que le joueur B gagne lorsque sa fortune initiale vaut n est $b_n = \dfrac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^n}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^N}$. Un calcul laissé au lecteur montre que $a_n + b_{N-n} = 1$, il est donc presque sûr que l'un des deux joueurs gagne en un temps fini.

---

4. Soit (A_n) une suite d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose $S = \bigcap_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$.

a. Montrer que S est un événement, i.e. $S \in \mathcal{A}$, et qu'il est réalisé si et seulement si une infinité des événements A_n sont réalisés.

b. Dans cette question et la suivante, on considère une suite infinie de lancers indépendants d'une pièce, la probabilité d'obtenir "Pile" à chaque lancer étant $p \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'événement A_n : "au cours des $2n$ premiers lancers, on obtient autant de Pile que de Face". Calculer $P(A_n)$ pour tout n.

c. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $\binom{2n}{n} \leq 4^n$. En déduire que, si $p \neq \frac{1}{2}$, la série $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ converge. Montrer alors que $P(S) = 0$.

- -

a. Une tribu est stable par réunion ou intersection finie ou dénombrable, donc $S \in \mathcal{A}$. Soit par ailleurs $\omega \in \Omega$. On a

$$\omega \in S \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \geq n \quad \omega \in A_k \ .$$

Cela signifie que l'ensemble des indices k tels que $\omega \in A_k$ est une partie de $\mathbb{N}$ non majorée, ou ce qui revient au même, une partie de $\mathbb{N}$ infinie.

b. On reconnaît un schéma de Bernoulli (répétition de $2n$ épreuves de Bernoulli indépendantes) de paramètres $2n$ et p, la probabilité d'apparition de n "succès" lors de $2n$ épreuves est alors $P(A_n) = \binom{2n}{n} p^n(1-p)^n$, c'est la loi binomiale $\mathcal{B}(2n,p)$.

c. L'inégalité $\binom{2n}{n} \leq 4^n$ est vraie pour $n = 0$ (c'est alors une égalité), et on récurre facilement après avoir vérifié que

$$\frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{\big((n+1)!\big)^2}\,\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \leq \frac{4n+4}{n+1} = 4\ .$$

Si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $p(1-p) < \frac{1}{4}$ (étudier les variations de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$), et alors $0 \leq P(A_n) \leq \big[4p(1-p)\big]^n$ (majoration par une suite géométrique de raison < 1), donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum P(A_n)$ est convergente.

Posons $B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$, alors $P(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$ par la propriété de sous-additivité, mais comme le reste d'ordre n d'une série convergente tend vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$, on en tire que $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0$. Enfin, on a $S \subset B_n$ pour tout n, donc par croissance d'une probabilité, $0 \leq P(S) \leq P(B_n)$ pour tout n. Comme $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0$, on déduit que $P(S) = 0$.

Autrement dit, si la pièce est déséquilibrée ($p \neq \frac{1}{2}$), le jeu sera presque sûrement définitivement déséquilibré à partir d'un certain moment. J'essaie de m'expliquer plus clairement: par exemple, si $p > \frac{1}{2}$, alors à chaque lancer, il est plus probable d'obtenir "Pile" que "Face" et, si l'on répète indéfiniment des lancers de cette pièce, il est presque sûr (événement de probabilité 1) qu'à partir d'un certain moment, on comptabilisera toujours strictement plus de “Pile” que de “Face” dans les lancers déjà effectués. Bref, si une équipe est vraiment meilleure qu'une autre à un jeu qu'elles répètent indéfiniment, il est presque sûr qu'il arrivera un moment où les deux équipes n'égaliseront plus, l'avantage restant définitivement à l'équipe la plus forte.

5*. Soit (A_n) une suite d'événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des événements A_n ne soit réalisé est majorée par $M = \exp\Big(-\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\Big)$.

On pourra utiliser l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - x \leq e^{-x}$.

- -

Pour tout n, on a, puisque les $\overline{A_n}$ sont aussi mutuellement indépendants,

$$\textbf{(*)} : \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} \overline{A_k}\Big) = \prod_{k=0}^{n} P\big(\,\overline{A_k}\,\big) = \prod_{k=0}^{n} \big(1 - P(A_k)\big) \leq \prod_{k=0}^{n} e^{-P(A_k)} = \exp\Big(-\sum_{k=0}^{n} P(A_k)\Big)\ .$$

Par continuité décroissante, puisque $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n$ avec $B_n = \bigcap_{k=0}^{n} \overline{A_k}$, la suite (B_n) étant décroissante pour l'inclusion, on a donc $\lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} \overline{A_k}\Big) = P\Big(\bigcap_{k=0}^{+\infty} \overline{A_k}\Big)$.

Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty} \exp\Big(-\sum_{k=0}^{n} P(A_k)\Big) = \exp\Big(-\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\Big) = M$ par continuité de l'exponentielle, en convenant que $M = 0$ si la série $\sum P(A_k)$ diverge, ce qui est cohérent. Par passage à la limite dans **(*)**, on obtient alors l'inégalité demandée.

Remarque. On déduit notamment que, si les A_n sont mutuellement indépendants et si la série $\sum P(A_n)$ diverge, alors il est presque sûr qu'aucun moins un des événements A_n se réalise.

Variables aléatoires discrètes.

6. Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois géométriques $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$ respectivement. Calculer $P(X < Y)$.

- -

On décompose $\{X < Y\} = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} \big(\{X = k\} \cap \{Y > k\}\big)$. Par σ-additivité de P, puis indépendance des variables X et Y, on obtient

$$P(X < Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)\, P(Y > k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}\,(1-q)^k = p\,(1-q) \sum_{k=0}^{+\infty} \big((1-p)(1-q)\big)^k\ .$$

Cela donne $P(X < Y) = \dfrac{p(1-q)}{1 - (1-p)(1-q)} = \dfrac{p - pq}{p + q - pq}$.

7. Calculer $\mathrm{E}\Big(\dfrac{1}{X+1}\Big)$ si X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

- -

C'est juste un petit calcul: la formule du transfert donne $\mathrm{E}\Big(\dfrac{1}{X+1}\Big) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ sous réserve que cette série converge. *On peut aussi dire que le calcul est toujours possible dans* $[0, +\infty]$ *puisque tous les termes sont positifs.* Mais le terme général $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{(k+1)!}$ est, à un décalage d'indice près, celui d'une série exponentielle, d'où la convergence, soit $\dfrac{1}{X+1}$ est d'espérance finie et

$$\mathrm{E}\Big(\frac{1}{X+1}\Big) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\ .$$

8. Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois géométriques $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$ respectivement. Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

- -

On note d'abord que la matrice aléatoire $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si $X(\omega) \neq Y(\omega)$: en effet, elle est triangulaire donc, si $X(\omega) \neq Y(\omega)$, elle admet deux valeurs propres distinctes, ce qui entraîne sa diagonalisabilité, tandis que si $X(\omega) = Y(\omega)$, elle a une seule valeur propre et elle n'est pas scalaire donc elle n'est pas diagonalisable. L'événement $\{A \text{ est diagonalisable}\}$ coïncide donc avec l'événement $\{X \neq Y\}$. Il est plus facile de travailler sur l'événement contraire, puisque

$$\{X = Y\} = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty}\Big(\{X = k\} \cap \{Y = k\}\Big)\ ,$$

Par incompatibilité puis indépendance, on déduit

$$\begin{aligned}
P(X = Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\big(X = k \text{ et } Y = k\big) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)\, P(Y = k) \\
&= pq\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1} \\
&= pq\sum_{k=0}^{+\infty}\big((1-p)(1-q)\big)^k \\
&= \frac{pq}{1-(1-p)(1-q)}\ .
\end{aligned}$$

Enfin, $P\big(\{A \text{ est diagonalisable}\}\big) = 1 - P(X=Y) = \dfrac{p+q-2pq}{p+q-pq}$.

---

9. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$. On considère N variables aléatoires $X_1, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

a. Soit $i \in [\![1,N]\!]$, soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leq n)$, puis $P(X_i > n)$.

b. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1\leq i\leq N} X_i$, c'est-à-dire

$$\forall \omega \in \Omega \qquad Y(\omega) = \min\big\{X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega)\big\}\ .$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(Y > n)$. En déduire $P(Y \leq n)$, puis $P(Y = n)$.

c. Reconnaître la loi de Y. En déduire $\mathrm{E}(Y)$.

- -

a. On a $P(X_i = k) = q\,p^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, donc

$$P(X_i \leq n) = \sum_{k=1}^{n} P(X_i = k) = \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1} = p\sum_{k=0}^{n-1} q^k = p\,\frac{1-q^n}{1-q} = 1 - q^n\ .$$

Par événement contraire, $P(X_i > n) = 1 - P(X_i \leq n) = q^n = (1-p)^n$.

b. Si $\omega \in \Omega$, on a $Y(\omega) > n \iff \min\big\{X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega)\big\} > n \iff \forall i \in [\![1,N]\!]\ \ X_i(\omega) > n$, donc $\{Y > n\} = \bigcap\limits_{i=1}^{N} \{X_i > N\}$ et, par indépendance des variables X_i,

$$P(Y > n) = \prod_{i=1}^{N} P(X_i > n) = (q^n)^N = q^{nN}\ .$$

Par événement contraire de nouveau, $P(Y \leq n) = 1 - P(Y > n) = 1 - q^{nN}$, puis

$$P(Y = n) = P(Y > n-1) - P(Y > n) = q^{(n-1)N} - q^{nN} = q^{(n-1)N}(1 - q^N)\ .$$

c. On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = (1 - q^N)\,(q^N)^{n-1}$, on reconnaît une loi géométrique de paramètre $1 - q^N$. Donc, d'après le cours, $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{1}{1-q^N}$.

---

10. Lors d'une rencontre d'athlétisme, la barre est montée d'un cran après chaque saut réussi par le concurrent. La compétition s'arrête pour le sauteur au premier saut raté. Pour le saut numéro n, l'athlète a une chance sur n de passer la barre. On note X le rang du dernier saut réussi.

Quelle est la loi de X? Montrer que X^2 est d'espérance finie, calculer l'espérance et la variance de X.

- -

Soit E_n l'événement: "l'athlète réussit le n-ième saut". On a $\{X = n\} = \Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n} S_k\Big) \cap \overline{S_{n+1}}$.

Ces événements étant mutuellement indépendants (*il faut bien le supposer!*), on déduit

$$P(X = n) = \Big(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big)\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}\ .$$

On vérifie que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)=1$ (*c'est facile, c'est une série télescopique*), ce qui montre que la compétition s'arrêtera presque sûrement, ou encore que X est presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}$ (et non dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$).

Pour l'espérance, la formule $\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X\geq n)$ permet un calcul rapide. En effet, l'événement $\{X\geq n\}$ signifie que les n premiers sauts ont été réussis, sa probabilité est donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n!}$. Donc

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(X\geq n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e-1\ .$$

Ensuite, il y a un peu de calcul: en écrivant $n^3=(n+1)n(n-1)+(n+1)-1$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\,P(X=n) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{(n+1)!}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}\\
&= e+(e-1)-(e-2) \;=\; e+1\ ,
\end{aligned}$$

et enfin $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2=e(3-e)$.

---

11. On considère un détecteur de particules ayant une probabilité de détection de chaque particule ègale à $p\in]0,1[$. On note N et S les variables aléatoires qui comptent respectivement le nombre de particules arrivant sur le capteur et le nombre de particules détectées. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

a. Soient s et n entiers naturels. Calculer $P(S=s|N=n)$, puis $P(S=s,N=n)$. En déduire la loi de S.

b. Sans calcul, donner la loi de $N-S$.

c. Les variables S et $N-S$ sont-elles indépendantes ?

d. Les variables N et S sont-elles indépendantes ?

- -

a. La loi conditionnelle de S sachant $N=n$ est binomiale de paramètres n et p, autrement dit

$$\forall (s,n)\in\mathbb{N}^2\qquad P\big(S=s\mid N=n\big)=\begin{cases}\dbinom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s} & \text{si } 0\leq s\leq n\\[2mm] 0 & \text{si } \qquad s>n\end{cases}\ .$$

Par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} P\big(S=s\,,\ N=n\big) &= P(N=n)\ P\big(S=s\mid N=n\big) \\ &= \begin{cases} e^{-\lambda}\ \dfrac{\lambda^n}{n!}\ \dbinom{n}{s} p^s(1-p)^{n-s} & \text{si } 0\le s\le n \\ 0 & \text{si } \quad s>n \end{cases} \end{aligned}$$

Enfin, par la formule des probabilités totales, en posant $q=1-p$ pour abréger,

$$\begin{aligned} P(S=s) &= \sum_{n=s}^{+\infty} P\big(S=s\,,\ N=n\big) \\ &= \sum_{n=s}^{+\infty} e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^n}{n!}\ \binom{n}{s} p^s q^{n-s} \\ &= \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^s\ p^s}{s!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k\ q^k}{k!} \qquad (\textit{avec } k=n-s) \\ &= \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^s\ p^s}{s!}\ e^{\lambda q} \ = \ e^{-\lambda p}\ \frac{(\lambda p)^s}{s!}\ . \end{aligned}$$

La variable S suit donc la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

b. La variable $N-S$ représente le nombre de particules ayant échappé à la détection. Or, la probabilité de non-détection d'une particule arrivant sur le capteur est $q=1-p$. *En quelque sorte, les succès deviennent des échecs et inversement.* Il suffit donc d'échanger p et q pour avoir la loi de la variable $N-S$, c'est donc $\mathcal{P}(\lambda q)$.

c. Si k et l sont deux entiers naturels, on a

$$P\big(S=k, N-S=l\big) = P\big(S=k, N=k+l\big) = e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^{k+l}}{(k+l)!}\ \binom{k+l}{k}\ p^k q^l\ ,$$

tandis que

$$P(S=k)\ P(N-S=l) = e^{-\lambda p}\,\frac{(\lambda p)^k}{k!}\ e^{-\lambda q}\ \frac{(\lambda q)^l}{l!} = e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^{k+l}\ p^k\ q^l}{k!\,l!}\ .$$

On constate que les deux expressions sont égales, les variables S et $N-S$ sont donc indépendantes.

d. Les variables S et N ne sont pas indépendantes, par exemple car $P\big(S=2, N=1\big)=0$, alors que $P(S=2)$ et $P(N=1)$ sont tous les deux non nuls.

---

12. Une urne contient trois boules numérotées 1, 2, 3. On tire avec remise une boule dans cette urne, on note X le nombre de tirages nécessaires pour voir apparaître les trois numéros. On note A le rang d'apparition du premier 1, B celui du premier 2, C celui du premier 3.

a. Exprimer l'événement $\{X>n\}$ en fonction de A, B et C. Calculer $P(X>n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

b. Calculer $P(X=n)$, puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)$. Interpréter.

c. La variable X est-elle d'espérance finie ? Si oui, calculer $\mathrm{E}(X)$.

- -

a. Notons que $X(\Omega) = [\![3, +\infty[\![$. L'événement $\{X > n\}$ se réalise lorsqu'au moins une des trois boules n'est pas apparue lors des n premiers tirages, donc

$$\{X > n\} = \{A > n\} \cup \{B > n\} \cup \{C > n\} .$$

Posons $E = \{A > n\}$, $F = \{B > n\}$, $G = \{C > n\}$. Il est connu que $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$. En itérant, on obtient

$$\begin{aligned} P(E \cup F \cup G) &= P\big((E \cup F) \cup G\big) \\ &= P(E \cup F) + P(G) - P\big((E \cup F) \cap G\big) \\ &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) + P(G) - P\big((E \cap G) \cup (F \cap G)\big) \\ &= P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) - P(F \cap G) - P(G \cap E) + P(E \cap F \cap G) . \end{aligned}$$

Pour démontrer cette relation, cas particulier de la "formule de Poincaré", dite aussi "formule du crible" (*hors programme*), on a utilisé notamment la distributivité de l'intersection par rapport à a réunion: $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$, et l'égalité évidente $(E \cap G) \cap (F \cap G) = E \cap F \cap G$.

Ici, les événements E, F, G ont tous trois pour probabilité $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, les événements $E \cap F$, $F \cap G$ et $G \cap E$ ont tous trois pour probabilité $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, enfin $E \cap F \cap G = \emptyset$. Finalement,

$$\forall n \geq 3 \qquad P(X > n) = P(E \cup F \cup G) = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2^n - 1}{3^{n-1}} .$$

Notons que cela reste cohérent pour $n = 1$ et $n = 2$ puisque $P(X > 1) = P(X > 2) = 1$.

b. Pour $n \geq 3$, on a

$$P(X = n) = P(X > n - 1) - P(X > n) = \frac{2^{n-1} - 1}{3^{n-2}} - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}} = \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}} .$$

On peut calculer "bêtement" la somme de la série (ce sont des séries géométriques), mais on peut aussi utiliser le télescopage:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=3}^{+\infty} \Big(P(X > n - 1) - P(X > n)\Big) = P(X > 2) - \lim_{n \to +\infty} P(X > n) = 1 - 0 = 1 ,$$

ce qui rassure toujours! De façon presque sûre, on finira par voir apparaître les trois boules.

c. Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, il suffit de considérer la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} P(X \geq n)$, qui est aussi, par décalage, $\displaystyle\sum_{n \geq 0} P(X \geq n - 1)$, soit encore $\displaystyle\sum_{n \geq 0} P(X > n)$. On a alors une combinaison linéaire de deux séries géométriques de raisons $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{1}{3}$, d'où la convergence, ce qui montre que $X \in L^1(\Omega)$, puis

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) = 1 + 1 + 1 + \sum_{n=3}^{+\infty} \left[3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] = 3 + \frac{3 \times \frac{8}{27}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{3 \times \frac{1}{27}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{11}{2} .$$

---

13. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elles suivent la même loi définie par:

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad P(X = k) = P(Y = k) = pq^k ,$$

où $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. On considère alors les variables U et V définies par $U = \max(X,Y)$ et $V = \min(X,Y)$.

a. Déterminer la loi du couple $S = (U,V)$.

b. Déterminer les lois marginales de U et de V.

c. Vérifier que $W = V + 1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V.

d. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

- -

Remarquons que les variables $X+1$ et $Y+1$ suivent une loi géométrique de paramètre p.

a. On a $S(\Omega) \subset \mathbb{N}^2$, soit alors $(k,l) \in \mathbb{N}^2$.

- Si $k < l$, il est clair que $P\big(S = (k,l)\big) = 0$.
- Si $k = l$, alors $\{S = (k,k)\} = \{X = k\} \cap \{Y = k\}$ puis, par indépendance,
$$P\big(S = (k,k)\big) = P(X = k)\, P(Y = k) = p^2\, q^{2k} .$$
- Si $k > l$, alors $\{S = (k,l)\} = \Big(\{X = k\} \cap \{Y = l\}\Big) \sqcup \Big(\{X = l\} \cap \{Y = k\}\Big)$, donc
$$P\big(S = (k,l)\big) = P(X = k)\, P(Y = l) + P(X = l)\, P(Y = k) = 2\, p^2\, q^{k+l} .$$

b. On a $U(\Omega) = V(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(U = n) &= \sum_{k=0}^{n} P\big(\{U = n\} \cap \{V = k\}\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2p^2 q^{n+k} + p^2 q^{2n} \\ &= 2p^2 q^n \frac{1 - q^n}{1 - q} + p^2 q^{2n} \\ &= p\, q^n\, (pq^n + 2 - 2q^n) . \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(V = n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} P\big(\{U = k\} \cap \{V = n\}\big) \\ &= p^2\, q^{2n} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2p^2 q^{k+n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= p^2\, q^{2n} + 2p^2 q^n\, \frac{q^{n+1}}{1-q} \\ &= p\, q^{2n}\, (1+q)\ . \end{aligned}$$

c. On a $W(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(W = n) = P(V = n-1) = p\, q^{2n-2}\, (1+q) = (1-q^2)\, (q^2)^{n-1}\ .$$

Ainsi, W suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$ et, d'après le cours, $\mathrm{E}(W) = \dfrac{1}{1-q^2}$.

Enfin, par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(V) = \mathrm{E}(W-1) = \mathrm{E}(W) - 1 = \dfrac{q^2}{1-q^2}$.

d. On note que $P\big(\{U = 0\} \cap \{V = 1\}\big) = 0$, alors que $P(U = 0) \neq 0$ et $P(V = 1) \neq 0$. Les variables U et V ne sont donc pas indépendantes.

---

14. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que, pour tout n, la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ est binomiale de paramètres n et p, avec $p \in]0,1[$.

a. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

b. Reconnaître la loi de Y.

- -

a. L'hypothèse signifie que

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad P\big(Y = k \mid X = n\big) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } \quad k > n \end{cases}\ .$$

Par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} P\big(X = n, Y = k\big) &= P(X = n)\ P\big(Y = k \mid X = n\big) \\ &= \begin{cases} e^{-\lambda}\, \dfrac{\lambda^n}{n!}\, \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } \quad k > n \end{cases} \end{aligned}$$

b. Par la formule des probabilités totales, en posant $q = 1 - p$ pour abréger, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P\big(X = n\ ,\ Y = k\big) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^n}{n!}\, \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{e^{-\lambda}\, \lambda^k\, p^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j\, q^j}{j!} \qquad \textit{(avec } j = n-k\textit{)} \\ &= \frac{e^{-\lambda}\, \lambda^k\, p^k}{k!}\, e^{\lambda q} \ =\ e^{-\lambda p}\, \frac{(\lambda p)^k}{k!}\ . \end{aligned}$$

La variable Y suit donc la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

15.a. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

b. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et de variance fiinie. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Prouver que :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathrm{E}(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{\mathrm{V}(Y_1)}{n\, a^2} \ .$$

c. **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ? *Indication : considérer la suite* (Y_i) *de variables aléatoires de Bernoulli où* Y_i *mesure l'issue du* i*-ème tirage.*

- -

a. *cf.* cours.

b. *cf.* cours (démonstration de la loi faible des grands nombres).

c. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, soit Y_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la i-ème boule tirée est rouge, 0 si elle est noire. Les Y_i sont mutuellement indépendantes, et suivent chacune la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{5}$. Donc $\mathrm{E}(Y_1) = \frac{2}{5}$ et $\mathrm{V}(Y_1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$. La variable $\frac{S_n}{n}$ représente la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages. On cherche à partir de quel rang n on peut affirmer que $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathrm{E}(Y_1)\right| \geq \frac{1}{20}\right) \leq \frac{1}{20}$. Or, avec $a = \frac{1}{20}$, l'inégalité du **b.** donne $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathrm{E}(Y_1)\right| \geq \frac{1}{20}\right) \leq 400\frac{\mathrm{V}(Y_1)}{n} = \frac{96}{n}$. Il suffit donc que l'on ait $\frac{96}{n} \leq \frac{1}{20}$, soit $n \geq 1920$.

---

16. On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et que, à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et face avec la probabilité $1-p$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux "pile" consécutifs. Par exemple, pour la suite de lancers PFFPFPPFFF..., on a $X = 7$. Pour tout n entier naturel non nul, on nomme P_n l'événement: "le n-ème lancer donne pile" et $F_n = \overline{P_n}$ l'événement: "le n-ème lancer donne face"

a. Pour tout n entier naturel, on note A_n l'événement: "on obtient pile aux lancers $2n+1$ et $2n+2$". Calculer $P(A_n)$ et $P\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \overline{A_k}\right)$. En déduire $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$, puis $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

b. Pour tout n, on note E_n l'événement: "on n'a pas obtenu deux pile consécutifs lors des n premiers lancers". Montrer que, pour $n \geq 3$, on a

$$P(X = n) = p^2(1-p)\, P(E_{n-3}) \ .$$

c. En utilisant la relation $\mathrm{E}(X)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(X\geq n)$, calculer le temps d'attente moyen de deux "pile" consécutifs.

- -

a. On a $A_n = P_{2n+1}\cap P_{2n+2}$ et, par indépendance, $P(A_n)=P(P_{2n+1})\,P(P_{2n+2})=p^2$. Donc $P(\overline{A_k})=1-p^2$. De nouveau par indépendance, $P\Big(\bigcap_{k=0}^{n-1}\overline{A_k}\Big)=(1-p^2)^n$. Soit l'événement $B=\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}$. Alors, pour tout n, on a $B\subset\bigcap_{k=0}^{n-1}\overline{A_k}$, donc pour tout n,

$$0\leq P(B)\leq P\Big(\bigcap_{k=0}^{n-1}\overline{A_k}\Big)=(1-p^2)^n \quad\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\quad 0\ ,$$

soit $P(B)=P\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}\Big)=0$. Par passage au complémentaire, $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\Big)=1$. On interprète cela en disant que la probabilité qu'au moins un des événements A_n se produise vaut 1. En toute rigueur, X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, mais l'événement $\{X=+\infty\}$, qui correspondrait à une suite de lancers où ne figurent jamais deux "Pile" consécutifs, est de probabilité nulle, puisque $\{X=+\infty\}\subset\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}$ (événement quasi-impossible). Ainsi, on a bien $\sum_{n=2}^{+\infty}P(X=n)=1$, ce qui permet de considérer X comme une variable aléatoire à valeurs (presque sûrement) dans $\mathbb{N}$.

b. On a $\{X=n\}=P_n\cap P_{n-1}\cap F_{n-2}\cap E_{n-3}$. En effet, si $X=n$, les lancers $n-1$ et n donnent "Pile", le lancer $n-2$ donne nécessairement "Face" (sinon on aurait eu $X<n$), et les $n-3$ premiers lancers n'ont jamais donné deux "Pile" consécutifs. La réciproque est immédiate. Par indépendance (l'événement E_{n-3} ne dépendant que des résultats des $n-3$ premiers lancers), on déduit

$$P(X=n)=p^2(1-p)\,P(E_{n-3})\ .$$

c. On a $E_n=\{X>n\}=\{X\geq n+1\}$ pour tout n, donc, en utilisant **b.**,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad P(X\geq n)=P(E_{n-1})=\frac{P(X=n+2)}{p^2(1-p)}\ .$$

De $\sum_{n=2}^{+\infty}P(X=n)=1$, on déduit la convergence de la série de terme général $P(X\geq n)$, et

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(X\geq n)=\frac{1}{p^2(1-p)}\sum_{n=3}^{+\infty}P(X=n)=\frac{1-P(X=2)}{p^2(1-p)}=\frac{1-p^2}{p^2(1-p)}=\frac{1+p}{p^2}\ .$$

Ainsi, dans le cas d'une pièce équilibrée, le temps d'attente moyen de deux "Pile" consécutifs est $\mathrm{E}(X)=6$.

17. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, soit $Z = X + Y$. On suppose que $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

a. Espérance et variance de X ? **b.** Fonction génératrice de X ? **c.** Loi de X ?

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi conditionnelle de X sachant $\{Z = n\}$?

- -

a. Comme X et Y sont positives et de somme Z, on a $0 \leq X \leq Z$. Le fait que Z soit d'espérance finie entraîne que X et Y sont toutes deux d'espérance finie par comparaison, et elles ont la même espérance puisqu'elles ont la même loi. De la linéarité de l'espérance, on déduit que

$$\lambda = \mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = 2\,\mathrm{E}(X)\ , \quad \text{donc} \quad \mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = \frac{\lambda}{2}\ .$$

De $0 \leq X \leq Z$, on déduit aussi que $0 \leq X^2 \leq Z^2$ et, comme Z^2 est d'espérance finie, il en est de même de X^2 par comparaison, donc X est de variance finie. Les variables étant, de plus, indépendantes,

$$\lambda = \mathrm{V}(Z) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) = 2\,\mathrm{V}(X)\ , \quad \text{donc} \quad \mathrm{V}(X) = \mathrm{V}(Y) = \frac{\lambda}{2}\ .$$

b. Comme X et Y sont indépendantes, $G_Z(t) = G_{X+Y}(t) = G_X(t)\,G_Y(t) = G_X(t)^2$ pour tout $t \in [-1, 1]$, donc $G_X(t)^2 = e^{\lambda(t-1)}$ d'après le cours.

Si $t \in [0, 1]$, alors $G_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)\, t^n$ est une somme de termes positifs, donc est positif, donc $G_X(t) = \sqrt{e^{\lambda(t-1)}} = e^{\frac{\lambda}{2}(t-1)}$.

Mais on sait que la fonction génératrice G_X est développable en série entière sur $[-1, 1]$, et le fait de connaître sa restriction à $[0, 1]$ la détermine entièrement (par exemple parce que cela permet de récupérer les coefficients à partir des dérivées successives évaluées en 0), on a donc $G_X(t) = e^{\frac{\lambda}{2}(t-1)}$ pour tout $t \in [-1, 1]$.

Remarque. La série entière définissant G_X est ici de rayon de convergence infini, et la formule donnée pour $G_X(t)$ est valable en fait pour tout t réel, mais l'usage est souvent de ne considérer la fonction génératrice d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ que sur l'intervalle $[-1, 1]$ puisque la connaissance de G_X sur cet intervalle est suffisante pour retrouver la loi de X, ainsi que ses moments (espérance, variance, ...).

c. La fonction génératrice déterminant la loi, on déduit que $X \sim \mathcal{P}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)$, et idem pour Y.

d. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $k > n$, alors bien sûr $P(X = k \mid Z = n) = 0$ et, si $0 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} P(X = k \mid Z = n) &= \frac{P(X = k\ ,\ Z = n)}{P(Z = n)} = \frac{P(X = k\ ,\ Y = n - k)}{P(Z = n)} \\ &= \frac{P(X = k)\ P(Y = n - k)}{P(Z = n)} = \frac{e^{-\lambda/2}\ \dfrac{\lambda^k}{2^k k!}\ e^{-\lambda/2}\ \dfrac{\lambda^{n-k}}{2^{n-k}(n-k)!}}{e^{-\lambda}\ \dfrac{\lambda^n}{n!}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

La loi conditionnelle de X sachant $\{Z = n\}$ est donc binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

---

18. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(T > n) > 0$. On appelle **taux de panne** associé à T la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\theta_n = P(T = n \mid T \geq n) .$$

Typiquement, si T est la variable aléatoire indiquant l'instant où un matériel tombe en panne, la quantité θ_n indique la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant n sachant qu'il était encore fonctionnel jusque là.

a. Montrer que $\theta_n \in [0, 1[$ pour tout n.

b. Exprimer $P(T \geq n)$ à l'aide des θ_k. En déduire que la série $\sum \theta_k$ diverge.

c*. Inversement, soit (θ_n) une suite d'éléments de $[0, 1[$ telle que la série $\sum \theta_n$ diverge. Montrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un taux de panne associé à une certaine variable aléatoire T.

- -

a. Le réel θ_n est une probabilité (conditionnelle) donc appartient à $[0, 1]$. S'il valait 1, on aurait $P(T = n) = P(T \geq n)$, donc par différence $P(T > n) = 0$, ce qui est exclu.

b. On a, pour tout n entier naturel,

$$\theta_n = \frac{P\big(\{T = n\} \cap \{T \geq n\}\big)}{P(T \geq n)} = \frac{P(T = n)}{P(T \geq n)} = \frac{P(T \geq n) - P(T \geq n+1)}{P(T \geq n)} = 1 - \frac{P(T \geq n+1)}{P(T \geq n)} .$$

Donc $\dfrac{P(T \geq n+1)}{P(T \geq n)} = 1 - \theta_n$ pour tout n. Partant de $P(T \geq 0) = 1$, on a immédiatement

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(T \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - \theta_k) .$$

Mais $P(T \geq n) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} P(T = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car c'est le reste d'ordre $n - 1$ d'une série convergente. Donc $\ln\big(P(T \geq n)\big) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - \theta_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. La série à termes négatifs $\sum \ln(1 - \theta_k)$ diverge donc.

Deux cas se présentent alors:

- si θ_k ne tend pas vers 0, alors évidemment la série $\sum \theta_k$ diverge (grossièrement) ;

- si θ_k tend vers 0, alors $\theta_k \sim -\ln(1 - \theta_k)$ et, par le critère des équivalents (les séries considérées sont à termes positifs), la série $\sum \theta_k$ est encore divergente.

c. Analyse: si T est une variable aléatoire solution, alors

$$P(T=n)=P(T\geq n)-P(T\geq n+1)=\prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)-\prod_{k=0}^{n}(1-\theta_k)=\theta_n\ \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)\ .$$

La loi de T est donc déterminée.

Synthèse: Posons $p_n=\theta_n\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)$ pour tout n entier naturel. Alors les p_n sont des réels positifs et, pour $n\in\mathbb{N}$, on a $p_n=q_n-q_{n+1}$ en posant $q_n=\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)$. Comme la série $\sum\theta_k$ diverge, il en est de même de la série à termes négatifs $\sum\ln(1-\theta_k)$ par un raisonnement analogue à celui de la fin de la question **b.**, donc ses sommes partielles tendent vers $-\infty$, soit $\ln(q_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}q_n=0$. La série télescopique $\sum p_n=\sum(q_n-q_{n+1})$ est alors convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}p_n=\sum_{n=0}^{+\infty}(q_n-q_{n+1})=q_0-\lim_{n\to+\infty}q_n=q_0=1$. Comme $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}$, il existe alors une variable aléatoire T (sur un certain espace probabilisé), à valeurs dans $\mathbb{N}$, et telle que $P(T=n)=p_n$ pour tout n.

Enfin, $P(T\geq n)=\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}p_k=\sum_{k=n}^{+\infty}(q_k-q_{k+1})=q_n$, puis

$$P(T=n|T\geq n)=\frac{P(T=n)}{P(T\geq n)}=\frac{p_n}{q_n}=\theta_n\ .$$

La suite (θ_n) est donc le taux de panne associé à la variable aléatoire T.

---

19. Soient $X_1,\cdots,X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes de variance finie. On appelle **matrice des covariances** de la famille $(X_1,\cdots,X_n)$ la matrice carrée d'ordre n:

$$S=\big(\mathrm{Cov}(X_i,X_j)\big)_{1\leq i,j\leq n}\ .$$

a. Soient $a_1,\cdots,a_n$ des réels. Exprimer la variance de $X=a_1X_1+\cdots+a_nX_n$ à l'aide de la matrice S.

b. Montrer que $\mathrm{Sp}(S)\subset\mathbb{R}_+$.

- -

a. La covariance étant une forme bilinéaire symétrique sur l'espace vectoriel $L^2(\Omega)$, on a

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{Cov}\Big(\sum_{i=1}^n a_iX_i,\sum_{j=1}^n a_jX_j\Big)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_j\ \mathrm{Cov}(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_j\ s_{i,j}\ .$$

Soit alors la matrice-colonne $A=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Avec un peu de métier, on reconnaît que $V(X)=A^\top\ S\ A$.

b. La matrice symétrique S est positive puisque, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec les notations du **a.**, $A^\top SA = \mathrm{V}(X) \geq 0$. Donc ses valeurs propres sont des réels positifs.

20*. Pour tout réel x tel que $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit la **loi zéta de paramètre** x, c'est-à-dire telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(X = n) = \frac{1}{n^x\,\zeta(x)}\ .$$

a. Vérifier la cohérence de cette définition.

b. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de l'événement $\{a \mid X\}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n-ième nombre premier, ainsi $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\cdots$ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements $\{p_k \mid X\}$, $1 \leq k \leq n$, sont mutuellement indépendants.

d. Montrer que $\{X = 1\} = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{\{p_k \mid X\}}$.

e. En déduire la (jolie) relation $\dfrac{1}{\zeta(x)} = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)$.

- -

a. La suite $\left(\dfrac{1}{n^x\,\zeta(x)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}^*$ puisque les réels $\dfrac{1}{n^x\,\zeta(x)}$ sont positifs de somme 1.

b. En posant $a\mathbb{N}^* = \{ka\ ;\ k \in \mathbb{N}^*\}$, on a

$$\{a \mid X\} = \{X \in a\mathbb{N}^*\} = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} \{X = ka\}\ ,$$

donc, par σ-additivité,

$$P(a \mid X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = ka) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(ka)^x\,\zeta(x)} = \frac{1}{a^x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x\,\zeta(x)} = \frac{1}{a^x}\ .$$

c. On sait (*vieux souvenirs du cours de première année*) que, si $p_{i_1}, \cdots, p_{i_k}$ sont des nombres premiers distincts et si m est un entier naturel, alors

$$\Big(\forall j \in [\![1, k]\!] \quad p_{i_j} \,\Big|\, m\Big) \iff \Big(\prod_{j=1}^{k} p_{i_j}\Big) \,\Big|\, m\ .$$

On peut traduire cela en termes d'événements: si $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, alors

$$\bigcap_{j=1}^{k} \{p_{i_j} \mid X\} = \left\{\Big(\prod_{j=1}^{k} p_{i_j}\Big) \,\Big|\, X\right\}\ .$$

On en déduit que

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k}\{p_{i_j} \mid X\}\Big) = P\left(\left\{\Big(\prod_{j=1}^{k} p_{i_j}\Big) \,\Big|\, X\right\}\right) = \frac{1}{\Big(\prod_{j=1}^{k} p_{i_j}\Big)^x} = \prod_{j=1}^{k}\frac{1}{p_{i_j}^x} = \prod_{j=1}^{k} P(p_{i_j} \mid X)\ .$$

On a a prouvé que, pour toute sous-famille des événements $\{p_1 \mid X\}$, $\cdots$, $\{p_n \mid X\}$, la probabilité de l'intersection est le produit des probabilités, c'est la définition d'événements indépendants.

d. Dans $\mathbb{N}^*$, seul le nombre 1 n'est divisible par aucun nombre premier. Donc $\{1\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{p_k\mathbb{N}^*}$ dans $\mathbb{N}^*$, soit $\{X=1\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{\{p_k|X\}}$ dans Ω. Autrement dit, si $\omega\in\Omega$, alors $X(\omega)$ vaut 1 si et seulement si $X(\omega)$ n'est multiple d'aucun nombre premier.

e. Soient les événements $A_k = \overline{\{p_k|X\}}$ pour $k\in\mathbb{N}^*$. On a $P(A_k) = 1 - \dfrac{1}{p_k^x}$ pour tout k. Il résulte du théorème de continuité décroissante que

$$P(X=1) = P\Big(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{1}{p_k^x}\Big)\ .$$

Comme, par ailleurs, $P(X=1) = \dfrac{1}{\zeta(x)}$, on obtient la relation demandée, que l'on écrit aussi sous la forme d'un **produit infini** (convergent):

$$\frac{1}{\zeta(x)} = \prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{p_n^x}\Big)\ .$$

---

21. Inégalité de Paley-Zygmund.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on suppose que X^2 est d'espérance finie. Prouver la relation

$$\forall t\in]0,1[\qquad P\big(X \geq t\,\mathrm{E}(X)\big) \geq (1-t)^2\,\frac{\mathrm{E}(X)^2}{\mathrm{E}(X^2)}\ .$$

Si on considère l'événement $A = \big\{X \geq t\,\mathrm{E}(X)\big\}$, on pourra commencer par écrire $X = X\cdot\mathbb{1}_A + X\cdot\mathbb{1}_{\bar A}$, où $\mathbb{1}_A$ est la variable indicatrice de l'événement A.

- -

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\mathrm{E}(X\cdot\mathbb{1}_A)^2 \leq \mathrm{E}(X^2)\ \mathrm{E}(\mathbb{1}_A^2) = \mathrm{E}(X^2)\ \mathrm{E}(\mathbb{1}_A)$. Comme $\mathrm{E}(\mathbb{1}_A) = P(A)$, on a obtenu la minoration

$$\textbf{(*)} \qquad P(A) \geq \frac{\mathrm{E}(X\cdot\mathbb{1}_A)^2}{\mathrm{E}(X^2)}\ .$$

Par ailleurs, par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(X\cdot\mathbb{1}_A) = \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X\cdot\mathbb{1}_{\bar A})$.

On note que $X\cdot\mathbb{1}_{\bar A} \leq t\,\mathrm{E}(X)$. En effet, pour $\omega\in\Omega$:

- si $\omega \in A$, alors $X \cdot \mathbb{1}_{\bar{A}}(\omega) = 0 \leq t\,\mathrm{E}(X)$ puisque $\mathrm{E}(X) \geq 0$;
- si $\omega \in \overline{A}$, alors $X \cdot \mathbb{1}_{\bar{A}}(\omega) = X(\omega) < t\,\mathrm{E}(X)$ puisque $\omega \notin A$.

Par croissance de l'espérance, on a alors $\mathrm{E}(X \cdot \mathbb{1}_{\bar{A}}) \leq t\,\mathrm{E}(X)$, donc

$$\mathrm{E}(X \cdot \mathbb{1}_A) = \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X \cdot \mathbb{1}_{\bar{A}}) \geq (1-t)\,\mathrm{E}(X) \geq 0$$

et, en élevant au carré, $\mathrm{E}(X \cdot \mathbb{1}_A)^2 \geq (1-t)^2\,\mathrm{E}(X)^2$. En réinjectant dans **(*)**, on obtient la minoration recherchée de $P(A)$.

Fonctions génératrices.

22. On considère deux dés que l'on lance indépendamment. Montrer qu'il est impossible de truquer les dés de façon que la somme des résultats affichés sur leur face supérieure suive une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$. *On pourra utiliser la fonction génératrice de la loi de la somme des résultats affichés.*

- -

L'un des deux dés (on l'appellera "le premier") porte sur ses faces les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, et les probabilités d'apparition de chaque numéro sont $p_1, \cdots, p_6$. Notons de même $q_1, \cdots, q_6$ les probabilités d'apparition des faces 1 à 6 pour le deuxième dé. Si l'on note respectivement U et V les variables aléatoires donnant le résultat de chacun des dés lors d'un lancer, alors les fonctions génératrices sont les polynômes (à coefficients réels)

$$G_U = \sum_{k=1}^{6} p_k X^k \qquad \text{et} \qquad G_V = \sum_{k=1}^{6} q_k X^k\ .$$

Les variables U et V étant indépendantes, on a $G_{U+V} = G_U G_V$. On voudrait que la variable $U+V$ suive la loi uniforme sur l'ensemble $[\![2, 12]\!]$, ce qui signifie que

$$G_{U+V} = \frac{1}{11}\left(X^2 + X^3 + \cdots + X^{11} + X^{12}\right) = \frac{X^2}{11}\left(1 + X + \cdots + X^9 + X^{10}\right)\ .$$

Il faudrait pour cela avoir, dans $\mathbb{R}[X]$, l'identité polynomiale

$$\left(\sum_{k=1}^{6} p_k X^k\right)\left(\sum_{k=1}^{6} q_k X^k\right) = \frac{X^2}{11}\left(1 + X + \cdots + X^9 + X^{10}\right)\ ,$$

soit, après simplification par X^2,

$$\left(\sum_{k=0}^{5} p_{k+1} X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{5} q_{k+1} X^k\right) = \frac{1}{11}\left(1 + X + \cdots + X^9 + X^{10}\right)\ .$$

Or, le polynôme $P = 1 + X + \cdots + X^9 + X^{10}$ de $\mathbb{R}[X]$ ne possède aucune racine réelle. En effet, on a $(X-1)P = X^{11} - 1$, les racines de P dans le plan complexe sont donc les racines onzièmes de l'unité autre que 1, et aucune d'elles n'est réelle. La décomposition de P en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ est donc constituée de cinq polynômes du second degré, il n'est donc pas possible que P puisse s'exprimer comme produit de deux polynômes de degré 5 à coefficients réels. Le truquage demandé est donc irréalisable.

---

23. La loi binomiale négative. On procède à une suite de répétitions indépendantes d'une expérience à deux issues: "succès" avec probabilité p, "échec" avec probablité $q = 1 - p$.

a. Soit X_2 la variable aléatoire égale au nombre de répétitions nécessaires pour obtenir deux succès. Donner la loi de X_2, et calculer son espérance.

b. Montrer, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$, la relation $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

c. Généralisation du **a.**: Soit k un entier naturel non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au temps d'attente du k-ième succès. Donner la loi de X_k et calculer son espérance.

d. Déterminer la fonction génératrice G_{X_k} de la variable X_k et son intervalle de convergence.

e. Retrouver ainsi l'espérance $\mathrm{E}(X_k)$. Calculer la variance $\mathrm{V}(X_k)$.

- -

Dans tout l'exercice, on notera S_n l'événement: "on obtient un succès lors de la n-ième répetition de l'expérience". Si on considère une famille d'événements $(T_1, \cdots, T_n)$ telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $T_n = S_n$ ou $T_n = \overline{S_n}$, alors les événements $T_1, \cdots, T_n$ sont mutuellement indépendants, ce qui justifiera les calculs qui vont suivre.

a. On a clairement $X_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$ et, pour tout $n \geq 2$, on a $X_2 = n$ si et seulement si on a un succès lors de la n-ième expérience, et que les $n-1$ premières répétitions de l'expérience ont amené un seul succès. Donc

$$\{X_2 = n\} = \bigsqcup_{i=1}^{n-1} \left(\overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_{i-1}} \cap S_i \cap \overline{S_{i+1}} \cap \cdots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n\right).$$

On en déduit $P(X_2 = n) = (n-1)\, p^2 q^{n-2}$.

Pour calculer l'espérance, on reconnaît

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\Big) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

(calcul valable pour $|x| < 1$), donc

$$\mathrm{E}(X_2) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\, P(X_2 = n) = p^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2\,p^2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p},$$

ce qui est conforme à l'intuition: si on a une chance sur 100 pour qu'un événement se produise, il faudra en moyenne répéter l'expérience 200 fois pour que l'événement espéré se produise deux fois.

b. La série entière "géométrique" $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n$ a pour rayon de convergence 1, on peut donc la dériver terme à terme sur l'intervalle de convergence $]-1, 1[$. On a ainsi, sur cet intervalle

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\Big) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} = k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k},$$

donc $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

Pour $k=2$, on retrouve le calcul fait pour obtenir $\mathrm{E}(X_2)$ *ci-dessus.*

c. Maintenant $X_k(\Omega) = [\![k, +\infty[\![$ et, si on se donne $n \geq k$, l'événement $X_k = n$ se produit si et seulement si:

- les $n-1$ premières répétitions de l'expérience conduisent à $k-1$ succès exactement (*appelons cela l'événement* $A_{n-1,k-1}$) ;
- la n-ème expérience conduit à un succès.

Ainsi, $\{X_k = n\} = A_{n-1,k-1} \cap S_n$ et, par indépendance (lemme des coalitions), $P(X_k = n) = P(A_{n-1,k-1})\, P(S_n)$.

Pour évaluer le premier facteur, on reconnaît la loi binomiale: la probabilité de $k-1$ succès lors de la répétition de $n-1$ épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p est $P(A_{n-1,k-1}) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k}$. *On aurait tout à fait pu procéder ainsi pour traiter la question* **a.** Donc, pour $n \geq k$, on a $P(X_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$.

Avant de passer au calcul de l'espérance, on peut d'abord s'assurer qu'il s'agit bien d'une variable aléatoire "essentiellement" à valeurs dans $\mathbb{N}$. En utilisant le calcul du **b.**, on a

$$\sum_{n=k}^{+\infty} P(X_k = n) = p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} = p^k \sum_{m=k-1}^{+\infty} \binom{m}{k-1} q^{m-(k-1)} = \frac{p^k}{(1-q)^k} = 1\ ,$$

ce qui est rassurant, et ce qui montre plus sérieusement que l'on finira presque sûrement par obtenir k succès, il suffit d'être patient!

Pour l'espérance, utilisons la classique relation $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$. ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \\
&= k\,p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} q^{n-k} \\
&= k\,p^k \frac{1}{(1-q)^{k+1}} = \frac{k}{p}\ ,
\end{aligned}$$

ce qui est aussi conforme à l'intuition, cf. remarque à la fin de la question **a.**

d. On a $X_k(\Omega) = [\![k, +\infty[\![$ et $P(X_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$ pour tout $n \geq k$. La fonction génératrice de X_k est définie par $G_{X_k}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} t^n$. On a

$$\frac{P(X_k = n+1)}{P(X_k = n)} = \frac{\binom{n}{k-1} p^k q^{n+1-k}}{\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}} = q\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\,\frac{(k-1)!(n-k)!}{(n-1)!} = q\frac{n}{n-k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q\ ,$$

donc (règle de d'Alembert) le rayon de convergence est $R = \dfrac{1}{q} > 1$ et l'intervalle de convergence est $I = \left]-\dfrac{1}{q}, \dfrac{1}{q}\right[$. Pour $t \in I$, on a

$$\begin{aligned} G_{X_k}(t) &= \sum_{m=k-1}^{+\infty} \binom{m}{k-1} p^k q^{m+1-k} t^{m+1} \\ &= p^k\, t^k \sum_{m=k-1}^{+\infty} \binom{m}{k-1} (qt)^{m-(k-1)} \\ &= p^k\, t^k\, \frac{1}{(1-qt)^k} \;=\; \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^k \end{aligned}$$

en utilisant la question **b.**

e. Pour $t \in I$, on obtient $G'_{X_k}(t) = \dfrac{k\, p^k\, t^{k-1}}{(1-qt)^{k+1}}$. Comme le rayon de convergence de la série génératrice est > 1, on peut affirmer que $X_k \in L^1(\Omega)$ et que $\mathrm{E}(X_k) = G'_{X_k}(1) = \dfrac{k\, p^k}{(1-q)^{k+1}} = \dfrac{k}{p}$, ce que confirment d'une part l'intuition, d'autre part la question **c.** ci-dessus.

Un petit calcul donne $G''_{X_k}(t) = \dfrac{k\, p^k\, t^{k-2}}{(1-qt)^{k+2}}\,(k-1+2qt)$, donc $G''_{X_k}(1) = \dfrac{k}{p^2}(k+1-2p)$.

Enfin, $\mathrm{V}(X_k) = G'_{X_k}(1) + G''_{X_k}(1) - \left(G'_{X_k}(1)\right)^2 = \dfrac{k\, q}{p^2}$ après réduction sur feu moyen.

Remarque. Tous ces résultats peuvent en fait être retrouvés d'une façon plus simple: posons $Y_1 = X_1$ et, pour tout $k \geq 2$, considérons la variable aléatoire Y_k donnant le temps d'attente du k-ième succès à partir du $k-1$-ième succès. En modélisant l'expérience par l'univers $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et si l'on considère que les succès sont les 1 et les échecs sont les 0, pour l'issue $\omega = (0,0,1,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,1,0,\cdots)$, on a $Y_1 = X_1 = 3$, $Y_2 = X_2 - X_1 = 4$, $Y_3 = X_3 - X_2 = 1$, $Y_4 = X_4 - X_3 = 6$, $\cdots$

En admettant l'indépendance mutuelle des variables Y_k, qui est "intuitivement évidente" (*et que l'on peut aussi démontrer, mais le calcul est assez pénible à écrire*), comme chacune de ces variables suit la loi géométrique de paramètre p et que l'on a $X_k = Y_1 + \cdots + Y_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} Y_i$, on peut écrire que

$$\forall t \in [-1,1] \qquad G_{X_k}(t) = \prod_{i=1}^{k} G_{Y_i}(t) = \left(G_{X_1}(t)\right)^k = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^k ,$$

Par ailleurs, la linéarité de l'espérance donne $\mathrm{E}(X_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}(Y_i) = k\,\frac{1}{p}$, puis l'indépendance donne enfin $\mathrm{V}(X_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathrm{V}(Y_i) = k\,\frac{q}{p^2}$.

24. On note X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On se donne une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi que X. Soit d'autre part N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, que l'on suppose indépendante des X_i. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$T(\omega) = \prod_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega) \ .$$

On conviendra que $T(\omega) = 1$ si $N(\omega) = 0$.

On suppose que X est d'espérance finie notée m. En utilisant la fonction génératrice G_N de la variable N, donner une condition nécessaire et suffisante pour que T soit d'espérance finie, et exprimer dans ce cas $\mathrm{E}(T)$. Étudier le cas particulier où N et X sont des variables de Poisson.

- -

La variable T étant positive, calculons dans $[0, +\infty]$ où toutes les interversions de sommations sont permises par le programme. Notons que, pour tout couple (k, n) d'entiers naturels, on a l'égalité des événements

$$\{T = k\} \cap \{N = n\} = \{N = n\} \cap \Big\{\prod_{i=1}^{n} X_i = k\Big\}$$

et que, les variables N, $X_1, \cdots, X_n$ étant indépendantes, on déduit du lemme des coalitions l'indépendance des variables N et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i$. Donc

$$P(T = k, N = n) = P(N = n)\ P\Big(\prod_{i=1}^{n} X_i = k\Big) \ .$$

C'est parti, calculons!

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(T) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\ P(T = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(T = k, N = n)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n)\ P\Big(\prod_{i=1}^{n} X_i = k\Big)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k\ P\Big(\prod_{i=1}^{n} X_i = k\Big)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n)\ \mathrm{E}\Big(\prod_{i=1}^{n} X_i\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n)\ \big(\mathrm{E}(X)\big)^n \ .
\end{aligned}$$

On en déduit que T est d'espérance finie si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} P(N = n)\, m^n$ est convergente et que, dans ce cas, $\mathrm{E}(T) = G_N\big(\mathrm{E}(X)\big) = G_N(m)$.

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $N \sim \mathcal{P}(\mu)$ avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, alors la fonction génératrice de N est une série entière de rayon de convergence infini, donc $\mathrm{E}(T) < +\infty$ et, précisément, $\mathrm{E}(T) = G_N(\lambda) = e^{\mu(\lambda-1)}$.

---

25. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit sa **fonction caractéristique** Φ_X par $\Phi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX})$ pour tout t réel.

a. Montrer que Φ_X est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale $I_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_X(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t$. Que dire de deux variables aléatoires X et Y, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que $\Phi_X = \Phi_Y$?

c. On suppose que X est d'espérance finie. Montrer que la fonction Φ_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\Phi'_X(0)$.

- -

a. On a donc $\Phi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, e^{int}$ pour tout réel t tel que cette série soit convergente. Mais si l'on pose $u_n(t) = P(X=n)\, e^{int}$, on a $|u_n(t)| = P(X=n)$, donc $\|u_n\|_\infty = P(X=n)$, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_\infty = 1$, ce qui garantit la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum u_n$, d'où l'existence de $\Phi_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ pour tout t, et la continuité sur $\mathbb{R}$ (puisque chacune des fonctions u_n est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'il y a CVN).

b. Fixons $k \in \mathbb{N}$. On a alors $I_k = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\, \mathrm{d}t$ où l'on pose $v_n(t) = \dfrac{1}{2\pi} P(X=n) e^{i(n-k)t}$. On est bigrement tenté d'intervertir série et intégrale! Or il se trouve que les fonctions v_n sont continues sur le segment $[-\pi, \pi]$ et que la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur ce **segment** puisque $\|v_n\|_\infty = \dfrac{1}{2\pi} P(X=n)$, terme général d'une série convergente, nous sommes donc autorisés à faire cette interversion. Donc

$$I_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} v_n(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}\, \mathrm{d}t = P(X=k)$$

puisque $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}\, \mathrm{d}t = 2\pi\, \delta_{n,k}$ (symbole de Kronecker).

On en déduit que, si $\Phi_X = \Phi_Y$, alors X et Y ont la même loi, soit $X \sim Y$ (*Attention! Ne pas répondre* $X = Y$). De même que la fonction génératrice G_X, la fonction caractéristique caractérise la loi de la variable aléatoire.

c. Reprenons les fonctions u_n introduites en **a.**, elles sont $\mathcal{C}^1$ et $u'_n(t) = in\, P(X=n)\, e^{int}$, donc $\|u'_n\|_\infty = n\, P(X=n)$. Si on suppose $X \in L^1(\Omega)$, alors la série $\sum \|u'_n\|_\infty$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, ce qui autorise à affirmer (sachant qu'il y a convergence simple de la série $\sum u_n$) que la fonction $\Phi_X = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et à intervertir série et dérivée. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \Phi_X'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(t) = i \sum_{n=1}^{+\infty} n\, P(X=n)\, e^{int} \ .$$

En particulier, $\Phi_X'(0) = i\, \mathrm{E}(X)$.

---

26. Une urne contient trois boules blanches, numérotées 1, 2, 3, ainsi que k boules noires ($k \in \mathbb{N}^*$). On effectue dans l'urne des tirages avec remise.

a. Soit X_1 la variable aléatoire donnant le numéro de la première boule blanche tirée. Quelle est la loi de X_1 ? Déterminer sa fonction génératrice.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue des tirages avec remise dans l'urne jusqu'à obtention de n boules blanches dont on note les numéros. On note S_n la variable aléatoire donnant la somme des numéros des boules blanches obtenues. Quelle est la fonction génératrice de S_n ? Donner son espérance et sa variance.

c. Soit r un entier naturel non nul. On effectue r tirages avec remise dans l'urne, on note N le nombre de boules blanches obtenues. On définit alors une variable aléatoire S par $\begin{cases} S=0 & \text{si} \quad N=0 \\ S=S_n & \text{si} \quad N=n\ (n\in\mathbb{N}^*) \end{cases}$. Calculer la fonction génératrice de S.

- -

a. La variable X_1 suit la loi uniforme sur $X_1(\Omega) = \{1,2,3\}$. Donc $G_{X_1}(t) = \dfrac{1}{3}(t+t^2+t^3)$.

On en déduit $\mathrm{E}(X_1) = 2$, $\mathrm{E}(X_1^2) = \dfrac{1}{3}(1^2+2^2+3^2) = \dfrac{14}{3}$ et $\mathrm{V}(X_1) = \mathrm{E}(X_1^2) - \mathrm{E}(X_1)^2 = \dfrac{2}{3}$.

b. Notons X_k le numéro de la k-ième boule blanche tirée ($1 \le k \le n$). Alors les variables X_k sont mutuellement indépendantes (intuitivement) et chacune suit la même loi que X_1. On a par ailleurs $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. D'après le cours, on a alors

$$G_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t) = \big(G_{X_1}(t)\big)^n = \frac{(t+t^2+t^3)^n}{3^n} \ .$$

Par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(S_n) = n\,\mathrm{E}(X_1) = 2n$.

Enfin, par indépendance des variables X_k, on a $\mathrm{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}(X_k) = n\,\mathrm{V}(X_1) = \dfrac{2n}{3}$.

c. Notons que $N(\Omega) = [\![0,r]\!]$ et, pour $n \in N(\Omega)$, $S_n(\Omega) = [\![0,3n]\!] \subset [\![0,3r]\!]$.

Enfin, $S(\Omega) = [\![0,3r]\!]$.

Pour $s \in S(\Omega)$, on a

$$P(S=s) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S=s|N=n)\, P(N=n) = \sum_{n=0}^{r} P(S=s|N=n)\, P(N=n) \ .$$

Par ailleurs, $P(S=s|N=n)=P(S_n=s)$. On a donc

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \sum_{s=0}^{3r} P(S=s)\,t^s \\ &= \sum_{s=0}^{3r}\Big(\sum_{n=0}^{r} P(S=s|N=n)\,P(N=n)\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{r} P(N=n)\,\Big(\sum_{s=0}^{3r} P(S_n=s)\,t^s\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{r} P(N=n)\,G_{S_n}(t) \\ &= \sum_{n=0}^{r} P(N=n)\,\big(G_{X_1}(t)\big)^n \\ &= G_N\big(G_{X_1}(t)\big)\ , \end{aligned}$$

autrement dit $G_S = G_N \circ G_{X_1}$.

On peut enfin expliciter G_N. En effet, la variable N suit la loi binomiale de paramètres r et $\dfrac{3}{k+3}$ (on répète r fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli au cours de laquelle la probabilité de succès, i.e. de tirer une boule blanche, est $\dfrac{3}{k+3}$, et N représente le nombre de succès). D'après le cours, $G_N(t)=\Big(\dfrac{3}{k+3}\,t+\dfrac{k}{k+3}\Big)^r=\Big(\dfrac{k+3t}{k+3}\Big)^r$. Finalement,

$$G_S(t)=\left(\frac{k+3\,G_{X_1}(t)}{k+3}\right)^r=\left(\frac{k+t+t^2+t^3}{3+k}\right)^r .$$

NB: Les différents calculs de fonctions génératrices sont valables avec t réel quelconque. En effet, les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont toutes à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, les fonctions génératrices associées sont donc polynomiales.

Exercices avec Python.

27. Une pièce a la probabilité $p\in]0,1[$ de tomber sur pile. On la lance jusqu'à avoir obtenu deux fois pile, et on note X le nombre de fois où elle est tombée sur "face".

a. Loi de X. Montrer que X est d'espérance finie et calculer $\mathrm{E}(X)$.

Lorsque $X=n$, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on en tire une au hasard. On note Y le numéro de la boule tirée.

b. Utiliser Python pour simuler cette expérience aléatoire.

c. Loi de Y. Calculer $\mathrm{E}(Y)$.

- -

a. Pour tout n entier naturel, l'événement $\{X = n\}$ est réalisé si et seulement si la séquence des $n+2$ premiers lancers est l'une des $n+1$ suivantes, comportant n fois F et deux fois P (le dernier lancer est un P=pile!):

$$FFF...FFPP\ ,\ FFF...FPFP\ ,\ \cdots\ ,\ FFPF...FFFP\ ,\ FPFF...FFFP\ ,\ PFFF...FFFP\ .$$

Sur tous les $n+2$ premiers lancers possibles, chacune de ces séquences a une probabilité égale à p^2q^n, avec $q = 1-p$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X = n) = (n+1)\, p^2q^n\ .$$

NB: On vérifiera par un calcul facile que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$, on a donc bien un système quasi-complet d'événements.

Le calcul de l'espérance nous amène à considérer la série de terme général $n\,P(X = n)$, soit $\sum n(n+1)p^2q^n$. Cette série converge (règle de d'Alembert par exemple), et on obtient

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)p^2q^n = p^2q \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)q^{n-1} = p^2q \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2}\ .$$

Pour $x \in]-1,1[$, posons $s(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Alors s est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et sa dérivée seconde sur $]-1,1[$ s'exprime de deux manières: $s''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$. On en conclut que

$$\mathrm{E}(X) = \frac{2p^2q}{(1-q)^3} = 2\,\frac{q}{p} = 2\,\frac{1-p}{p}\ .$$

b. *cf.* script.

c. Comme $\big(\{X = n\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'événements, la formule des probabilités totales donne, pour tout k entier naturel,

$$P(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(Y = k \mid X = n)\ P(X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}(n+1)p^2q^n = p^2\,\frac{q^k}{1-q} = p\,q^k\ .$$

On en déduit

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,P(Y = k) = pq\sum_{k=1}^{+\infty} k\,q^{k-1}\ ,$$

on reconnaît cette fois-ci $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\,x^{k-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \frac{1}{(1-x)^2}$, calcul valable sur $]-1,1[$, donc $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{q}{p} = \dfrac{1-p}{p}$.