CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PSI

2023

4 heures — Calculatrice autorisée

Quelques applications de la formule de Stirling

Ce problème propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling et de l'appliquer à l'étude des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$.

I Intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Q 1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

On étudie les fonctions f et g définies par

$$f(x)=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Q 2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

Q 3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

Q 4. Montrer que g est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q 5. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=-2g'(x)g(x).$$

Q 6. Vérifier que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{\pi}{4}-g(x)^2.$$

Q 7. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$, puis conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

II Formule de Stirling

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{q_n}{n}\right).$$

II.A – Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Q 8. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Q 9. Donner une relation entre I_{n+1} et I_n, et en déduire que $I_n=n!$ pour tout entier naturel n.

II.B – Cette sous-partie est consacrée à la démonstration de la formule de Stirling classique

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n. \tag{II.1}$$

Q 10. Si n est un entier naturel non nul, déduire de la question précédente que

$$n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\,\mathrm{d}y.$$

On note $\mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\sqrt{n},+\infty[$ dont on rappelle qu'elle vaut 1 sur $[-\sqrt{n},+\infty[$ et 0 sur $]-\infty,-\sqrt{n}[$. On pose pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $y\in\mathbb{R}$, $f_n(y)=\mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}(y)\left(1+\dfrac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}$.

Q 11. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et, pour $y\in\mathbb{R}$, préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(y)$.

Pour $x\in\,]-1,+\infty[\,\setminus\{0\}$ on pose $q(x)=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$.

Q 12. Justifier que q est prolongeable en une fonction continue sur $]-1,+\infty[$ que l'on convient de noter également q.

Q 13. Démontrer que, pour tout $x>-1$, $q(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u$.

Q 14. En déduire que q est une fonction décroissante sur $]-1,+\infty[$ et démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\forall y\in\mathbb{R}^+,\quad f_n(y)\leqslant(1+y)\mathrm{e}^{-y}\qquad\text{et}\qquad \forall y\in\mathbb{R}^{-*},\quad f_n(y)\leqslant \mathrm{e}^{-y^2/2}.$$

Q 15. Déduire des questions précédentes la formule de Stirling (II.1).

II.C – Pour raffiner la formule de Stirling, on introduit les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n=\frac{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!}\qquad v_n=\ln(u_n)\qquad w_n=v_{n+1}-v_n.$$

Q 16. Vérifier que $w_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de la série numérique $\sum w_n$.

II.C.1) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et la série numérique $\sum b_n$ converge.

Q 17. Soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que

$$\forall n\geqslant n_0,\quad (1-\varepsilon)b_n\leqslant a_n\leqslant(1+\varepsilon)b_n.$$

Q 18. En déduire que la série numérique $\sum a_n$ converge et que les restes vérifient $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

II.C.2) Si n est un entier naturel non nul, on pose $R_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

Q 19. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, établir que $\dfrac{1}{(n+1)^2}\leqslant\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n^2}$.

Q 20. En déduire un équivalent simple de R_n lorsque $n\to+\infty$.

II.C.3)

Q 21. Déduire des questions précédentes un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ lorsque $n\to+\infty$.

Q 22. En déduire qu'il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{q_n}{n}\right).$$

III Étude de deux séries entières et application à une marche aléatoire

Un point se déplace sur un axe gradué. Au départ, il se trouve à l'origine et à chaque étape il se déplace suivant le résultat du lancer d'une pièce de monnaie qui n'est pas supposée équilibrée.

Le déplacement du point est formalisé de la manière suivante. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = q, \quad \text{où } p \in]0,1[\text{ et } q = 1 - p.$$

Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ représentent les résultats des lancers successifs de la pièce de monnaie.

L'abscisse S_n du point à l'issue du n-ième lancer est alors définie par :

$$\begin{cases} S_0 = 0, \\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

On admet que, si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi alors, pour tout $n \geqslant 2$, quel que soit l'entier k compris entre 1 et $n-1$, les variables aléatoires $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k} Y_i$ et $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} Y_i$ suivent la même loi.

On se propose de calculer la probabilité que le point ne revienne jamais à l'origine.

On remarque que le point ne peut revenir à l'origine (i.e. $S_k = 0$) qu'après un nombre pair de lancers de la pièce de monnaie (i.e. $k = 2n$).

On introduit alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \quad \text{et} \quad b_n = \mathbb{P}\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} = 0]\big)$$

et les séries entières

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \quad \text{et} \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n}.$$

III.A –

Q 23. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\dfrac{1}{2}(X_1 + 1)$? En utilisant une loi binomiale, calculer l'espérance et la variance de la variable S_n.

Q 24. Écrire une fonction Python qui prend en argument le nombre n de lancers et renvoie le nombre de retours au point à l'origine.

> On pourra utiliser la fonction Python `random.random()` qui renvoie un nombre flottant pseudo-aléatoire dans l'intervalle $[0, 1[$.

Q 25. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \dbinom{2n}{n} p^n q^n$.

Q 26. En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^{2n}$.

Q 27. Pour quelles valeurs de p l'expression $A(x)$ est-elle définie en $x = 1$?

Q 28. En utilisant le développement en série entière en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ déterminer une expression de $A(x)$.

III.B –

Q 29. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en décomposant l'événement $\{S_{2n} = 0\}$ selon l'indice de 1er retour du point à l'origine, établir la relation $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$.

Q 30. En déduire une relation entre $A(x)$ et $B(x)$ et préciser pour quelles valeurs de x elle est valable.

Q 31. Conclure que $B(x) = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$ pour x dans un intervalle à préciser.

Q 32. Pour quelles valeurs de p l'expression obtenue à la question précédente pour $B(x)$ est-elle définie en $x = 1$? Qu'en est-il de l'expression qui définit $B(x)$ comme somme d'une série entière ?

III.C –

Q 33. En déduire que la probabilité de l'évènement « le point ne revient jamais en 0 » est égale à $|p - q|$.

IV Loi de l'arcsinus

Dans cette partie, on reprend les notations de la partie III et on se place dans le cas particulier $p = q = 1/2$. Dans ce cas tous les « chemins » de la marche aléatoire sont équiprobables : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \mathbb{P}\big([S_1 = x_1] \cap [S_2 = x_1 + x_2] \cap \cdots \cap [S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n]\big) = \frac{1}{2^n}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on s'intéresse désormais au moment de la *dernière visite* en 0 de la marche aléatoire au cours des $2n$ premiers pas, c'est-à-dire à la variable aléatoire T_n définie par

$$T_n = \max\big\{0 \leqslant k \leqslant 2n \;\big|\; S_k = 0\big\}.$$

On admet dans la suite que T_n est une variable aléatoire discrète, définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si x est un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

IV.A – Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *chemin de longueur* n toute ligne polygonale reliant les points $(0, S_0)$, $(1, S_1)$, ..., (n, S_n).

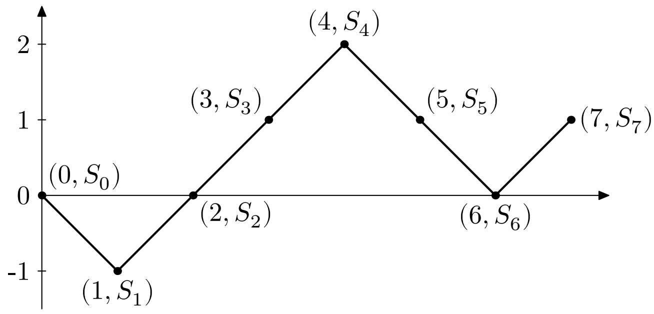

Figure 1 Un chemin de longueur 7

Dans cette sous-partie IV.A, n, x et y sont des entiers naturels tels que $n \neq 0$, $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

IV.A.1) On note $N_{n,x}$ le nombre de chemins reliant le point $(0, 0)$ au point (n, x).

Q 34. Vérifier que si $x \in [\![-n, n]\!]$ et $n - x$ est un entier pair alors

$$N_{n,x} = \binom{n}{a} \quad \text{où} \quad a = \frac{n + x}{2}$$

et que $N_{n,x} = 0$ dans le cas contraire.

Q 35. En déduire $\mathbb{P}(S_n = x)$.

Q 36. Retrouver ce résultat à l'aide d'une variable aléatoire bien choisie.

IV.A.2) Principe de réflexion

Q 37. Montrer que le nombre de chemins reliant $(0, x)$ à (n, y), tout en passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0, est égal au nombre de chemins quelconques reliant $(0, -x)$ à (n, y).

IV.A.3)

Q 38. En utilisant le principe de réflexion, montrer que le nombre de chemins reliant $(1, 1)$ à (n, x) sans jamais rencontrer l'axe des abscisses est égal à

$$N_{n-1,x-1} - N_{n-1,x+1}.$$

Q 39. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}\big([S_1 > 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} = 2k]\big) = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(S_{2n-1} = 2k-1) - \mathbb{P}(S_{2n-1} = 2k+1)\Big).$$

Q 40. En remarquant que $[S_{2n} > 0] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [S_{2n} = 2k]$, démontrer que

$$\mathbb{P}\big([S_1 > 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} > 0]\big) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$$

puis que

$$\mathbb{P}\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} \neq 0]\big) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$

IV.B – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 41. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0) \times \mathbb{P}\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-2k} \neq 0]\big).$$

Q 42. En déduire que pour $k \in [\![0, n]\!]$

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n}.$$

IV.C – Dans cette sous-partie IV.C α et β sont deux réels tels que $0 < \alpha < \beta < 1$.

Q 43. On définit la fonction f par $f(t) = \begin{cases} f(\alpha) & \text{si } t \in [0, \alpha[\\ \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} & \text{si } t \in [\alpha, \beta] \\ f(\beta) & \text{si } t \in]\beta, 1]. \end{cases}$

En utilisant des sommes de Riemann adaptées à f, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t.$$

Q 44. À l'aide de la partie II justifier qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers 1 telle que

$$\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{8n}\right).$$

Q 45. En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \right) = 0.$$

Q 46. Montrer alors que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = \frac{2}{\pi}\Big(\arcsin(\sqrt{\beta}) - \arcsin(\sqrt{\alpha})\Big).$$

Ce résultat a des conséquences assez surprenantes au premier abord. Par exemple $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\dfrac{T_{2n}}{2n} \leqslant \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ *s'interprète ainsi : si deux personnes parient chacune un euro chaque jour de l'année à un jeu de hasard équilibré, alors avec la probabilité* $1/2$*, un des deux joueurs sera en tête du premier juillet au 31 décembre.*

• • • FIN • • •