

**CONCOURS COMMUNS  
POLYTECHNIQUES****ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI**

---

**MATHÉMATIQUES****Lundi 30 avril : 14 h - 18 h**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

---

**Les calculatrices sont interdites**

**Le sujet est composé de 2 problèmes indépendants.**

# PROBLÈME 1

Ce problème comporte 3 parties indépendantes.

## Notations et définitions

- $\mathbf{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbf{N}^*$  désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
- $\mathbf{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbf{R}[X]$  désigne le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier  $n \in \mathbf{N}$ , on note  $\mathbf{R}_n[X]$  le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .
- Si  $n_1$  et  $n_2$  sont deux entiers naturels, on note  $\llbracket n_1, n_2 \rrbracket$  l'ensemble des entiers naturels compris (au sens large) entre  $n_1$  et  $n_2$ .

## Objectifs

On s'intéresse dans ce problème à l'équation différentielle  $x^2y'' + axy' + by = 0$ . La **partie I** est une partie d'algèbre linéaire qui traite des solutions polynomiales de cette équation lorsque  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles. Dans la **partie II**, on détermine l'ensemble des solutions de l'équation lorsque  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles. La **partie III** traite des solutions de cette équation lorsque  $a = 1$  et  $b$  est la fonction carrée.

## Partie I - Endomorphismes

Dans toute cette partie,  $n$  désigne un entier naturel non nul et  $a$  et  $b$  des constantes réelles.

**Q1.** On note  $\Delta$  l'endomorphisme de  $\mathbf{R}[X]$  défini par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \Delta(P) = XP'$$

Calculer, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\Delta(X^k)$ .

**Q2.** Montrer que pour tout  $P \in \mathbf{R}[X]$ ,  $X^2P'' = \Delta \circ (\Delta - \text{Id})(P)$ , où  $\text{Id}$  désigne l'endomorphisme identité sur  $\mathbf{R}[X]$ .

**Q3.** Montrer que si  $P \in \mathbf{R}_n[X]$ ,  $\Delta(P) \in \mathbf{R}_n[X]$ .

On notera  $\Delta_n$  l'endomorphisme de  $\mathbf{R}_n[X]$  induit par  $\Delta$ .

**Q4.** Déterminer la matrice de  $\Delta_n$  dans la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

**Q5.** On définit l'application  $\Phi$  par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \Phi(P) = X^2P'' + aXP'$$

Montrer que  $\Phi = \Delta^2 + (a - 1)\Delta$  et en déduire que  $\Phi$  définit un endomorphisme de  $\mathbf{R}[X]$ .

**Q6.** Montrer que  $\Phi$  induit un endomorphisme  $\Phi_n$  de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

**Q7.** Montrer que  $\Phi_n$  est diagonalisable.

On considère l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbf{R}[X]$  défini par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP.$$

- Q8.** Montrer que  $\varphi$  induit un endomorphisme de  $\mathbf{R}_n[X]$ , endomorphisme que l'on notera  $\varphi_n$ .  
Exprimer  $\varphi_n$  en fonction de  $\Delta_n$ .
- Q9.** Exprimer la matrice de  $\varphi_n$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

On considère l'équation :

$$s^2 + (a - 1)s + b = 0. \quad (1)$$

- Q10.** Expliciter le noyau de  $\varphi_n$  lorsque l'équation (1) admet deux racines entières  $m_1, m_2 \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .
- Q11.** Expliciter le noyau de  $\varphi_n$  lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière  $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .
- Q12.** Déterminer le noyau de  $\varphi$ . En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.

## Partie II - Une équation différentielle

On considère dans cette partie l'équation différentielle

$$x^2 y'' + axy' + by = 0, \quad (2)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles.

- Q13.** Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (2) sur  $I = ]0, +\infty[$  ? Et sur  $J = ]-\infty, 0[$  ?
- Q14.** Montrer que si  $y$  est une solution de (2) sur  $I$ , alors  $g = y \circ \exp$  est une solution sur  $\mathbf{R}$  de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$u'' + (a - 1)u' + bu = 0. \quad (3)$$

- Q15.** Réciproquement, soit  $t \mapsto g(t)$  une solution de (3) sur  $\mathbf{R}$ . Montrer que la fonction  $g \circ \ln$  est solution de (2) sur  $I$ .
- Q16.** Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (3) dans le cas où  $a = 3$  et  $b = 1$  et dans le cas où  $a = 1$  et  $b = 4$ . En déduire, dans chacun des cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (2) sur l'intervalle  $I$ .

On suppose dans les deux questions suivantes uniquement que  $a = 1$  et  $b = -4$ .

- Q17.** Montrer que si  $y$  est solution de (2) sur  $J$ , alors  $h = y \circ (-\exp)$  est solution de (3) sur  $\mathbf{R}$ .
- Q18.** Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (2) de classe  $C^2$  sur  $\mathbf{R}$ .

## Partie III - Une équation de Bessel

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0. \quad (4)$$

- Q19.** Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

### Série entière dont la somme est solution de (4)

On suppose qu'il existe une série entière  $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$ , avec  $c_0 = 1$ , de rayon de convergence  $R > 0$  et dont la fonction somme  $J_0$  est solution de (4) sur  $] - R, R[$ .

**Q20.** Montrer que, pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} &= 0 \\ c_{2k} &= \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} \end{cases} .$$

**Q21.** Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière obtenue :  $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$ .

**Q22.** Soit  $r > 0$  et soit  $f$  une autre solution de (4) sur  $]0, r[$ . Montrer que si  $(J_0, f)$  est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe  $C^2$  sur  $]0, r[$ , alors  $f$  est bornée au voisinage de 0.

### Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit  $\sum_{k \geq 0} \alpha_k x^k$  une série entière de rayon de convergence  $R_\alpha > 0$  telle que  $\alpha_0 = 1$ . L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière  $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$  de rayon de convergence  $R_\beta > 0$  telle que pour tout  $x$  appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left( \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k \right) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = 1.$$

**Q23.** Montrer que si  $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$  est solution, alors la suite  $(\beta_k)_{k \in \mathbf{N}}$  satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \beta_0 &= 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}^* \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} &= 0 \end{cases} . \quad (5)$$

Soit  $r$  un réel tel que  $0 < r < R_\alpha$ .

**Q24.** Montrer qu'il existe un réel  $M > 0$  tel que pour tout  $k \in \mathbf{N}$  :

$$|\alpha_k| \leq \frac{M}{r^k} .$$

**Q25.** Montrer que (5) admet une unique solution  $(\beta_k)_{k \in \mathbf{N}}$  et que, pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$  :

$$|\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k} .$$

On pourra raisonner par récurrence.

**Q26.** Que peut-on dire du rayon de convergence  $R_\beta$  de la série entière  $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$  ?

### Ensemble des solutions de (4)

**Q27.** Soit  $r > 0$  et soit  $\lambda$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $]0, r[$ .

Montrer que la fonction  $y : x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$  est solution de (4) sur  $]0, r[$  si et seulement si la fonction  $x \mapsto xJ_0^2(x)\lambda'(x)$  est de dérivée nulle sur  $]0, r[$ .

**Q28.** Montrer que  $J_0^2$  est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut  $J_0^2(0)$  ?

**Q29.** En déduire l'existence d'une fonction  $\eta$  somme d'une série entière de rayon de convergence  $R_\eta > 0$  telle que

$$x \mapsto \eta(x) + J_0(x) \ln(x)$$

soit solution de (4) sur un intervalle  $]0, R_\eta[$ .

**Q30.** En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur  $]0, R_\eta[$ .

## PROBLÈME 2

### Notations et définitions

- $\mathbf{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbf{R}$  désigne celui des nombres réels.
- Si  $X$  est une variable aléatoire admettant une espérance, on note  $\mathbf{E}(X)$  son espérance.

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  un espace probabilisé. Soit  $X$  une variable aléatoire discrète sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , à valeurs dans  $[-1, 1]$ . On considère dans ce problème une suite  $(X_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$  de variables aléatoires *discrètes* sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , *mutuellement indépendantes et de même loi que X*. Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on note :

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

### Objectif

Montrer que si la variable aléatoire  $X$  est centrée ( $\mathbf{E}(X) = 0$ ), alors la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  converge presque-sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

**Q31.** On ne suppose pas  $X$  centrée dans cette question. Montrer que  $X$  admet une espérance.

On suppose désormais que  $X$  est *centrée*.

**Q32.** Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire finie  $Y$  sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ .  
Montrer que ce résultat est encore vrai lorsque  $Y$  est une variable aléatoire discrète non nécessairement finie.

**Q33.** En déduire que pour tout  $\alpha > 0$  :

$$\mathbf{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|)}{\alpha}.$$

**Q34.** Montrer que pour tout  $t > 0$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on a :

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \frac{(\mathbf{E}(e^{tX}))^n}{e^{tn\varepsilon}}.$$

### Majoration de $\mathbf{E}(e^{tX})$

**Q35.** Soit  $a > 1$ . On considère la fonction  $g_a$  définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction  $g_a$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  et que la fonction  $g'_a$  est décroissante sur  $\mathbf{R}$ .  
En déduire, en remarquant que  $g_a(-1) = g_a(1) = 0$ , que pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $g_a(x) \geq 0$ .

**Q36.** En déduire que pour tout  $t > 0$  et pour tout  $x \in [-1, 1]$  on a :

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t.$$

**Q37.** En déduire que pour tout  $t > 0$  :

$$\mathbf{E}(e^{tX}) \leq \text{ch}(t).$$

**Q38.** Montrer que pour tout entier  $k \in \mathbf{N}$  et tout  $t \in \mathbf{R}$ , on a :

$$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que pour tout  $t > 0$ , on a :

$$\mathbf{E}(e^{tX}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$

### Majoration de $\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier  $n \in \mathbf{N}^*$  et un réel  $\varepsilon > 0$ .

**Q39.** Montrer que la fonction

$$t \in \mathbf{R} \mapsto e^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$$

atteint un minimum en un point que l'on précisera.

**Q40.** En déduire que  $\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$ , puis que :

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

## Conclusion

**Q41.** Montrer que pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , la série de terme général  $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$  converge.

**Q42.** On fixe un réel  $\varepsilon > 0$ . On note, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  :

$$B_n = \bigcup_{m \geq n} \{\omega \in \Omega ; |S_m(\omega)| > \varepsilon\}.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $B_n$  est un événement et que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} B_n\right) = 0.$$

**Q43.** Posons, pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$  :

$$\Omega_k = \left\{ \omega \in \Omega ; \exists n \in \mathbf{N}^*, \forall m \geq n, |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Montrer que pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ ,  $\Omega_k$  est un événement.

Écrire l'ensemble  $A = \left\{ \omega \in \Omega ; \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\omega) = 0 \right\}$  à l'aide des événements  $\Omega_k$ ,  $k \in \mathbf{N}^*$ .

En déduire que  $A$  est un événement.

**Q44.** Déduire des questions précédentes que :

$$\mathbf{P}(A) = 1.$$

# FIN