PLANCHES d'ORAL de MATH-INFO, CENTRALE

Planche 1

1. Soit le polynôme $P = X^5 + X^4 - 10X^3 + 6X^2 + 9X - 7$, soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Trouver les racines entières de P. En déduire toutes les racines de P.

b. Calculer $u_n = \dfrac{\mathrm{tr}(M^{n+1})}{\mathrm{tr}(M^n)}$ pour n de 1 à 40. Que peut-on conjecturer ?

c. Montrer que P est le polynôme caractéristique de M.

2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, soit $P = X^d + \displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$ un polynôme unitaire de degré d dans $\mathbb{R}[X]$.

a. Montrer que P est le polynôme caractéristique de $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{d-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$.

b. Exprimer $u_n = \dfrac{\mathrm{tr}(M^{n+1})}{\mathrm{tr}(M^n)}$ à l'aide des valeurs propres complexes $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ de M.

c. On suppose que λ_1 est l'unique valeur propre de module maximal de M, on a donc $\forall i \in [\![2, d]\!] \quad |\lambda_i| < |\lambda_1|$. Montrer que λ_1 est réel et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lambda_1$.

- -

1.a. *cf.* script. On constate (avec Python ou pas ?) que 1 est racine double de P, -1 est racine simple, on divise alors P par $D = (X-1)^2(X+1) = X^3 - X^2 - X - 1$, le quotient est $Q = X^2 + 2X - 7 = (X+1)^2 - 8 = (X+1)^2 - (2\sqrt{2})^2$, les autres racines de P sont alors $-1 - 2\sqrt{2}$ et $-1 + 2\sqrt{2}$.

b. *cf.* script. Cela semble converger vers $-3,828$...

c. Calcul classique (sans Python ?), on reconnaît une matrice-compagnon. Dans le déterminant $\chi_M(x) = \det(xI_5 - M)$, on effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + xL_2 + x^2L_3 + x^3L_4 + x^4L_5$, on obtient alors

$$\chi_M(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & P(x) \\ -1 & x & 0 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & x & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & x & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+5} \times P(x) \times (-1)^4 = P(x)\ .$$

2.a. Calcul analogue à **1.c.** Dans le déterminant $\chi_M(x) = \det(xI_d - M)$, on effectue l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{d} x^{k-1} L_k$, et on obtient

$$\chi_M(x) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & P(x) \\ -1 & x & & (0) & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & a_{d-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x + a_{d-1} \end{pmatrix} = (-1)^{1+d} \times P(x) \times (-1)^{d-1} = P(x)\ .$$

b. Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ sont les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de M, alors M est semblable sur $\mathbb{C}$ à une matrice triangulaire T de diagonale $(\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$. Puis, pour tout n, M^n est semblable à T^n qui est triangulaire de diagonale $(\lambda_1^n, \cdots, \lambda_d^n)$. Donc

$$\frac{\mathrm{tr}(M^{n+1})}{\mathrm{tr}(M^n)} = \frac{\lambda_1^{n+1} + \cdots + \lambda_d^{n+1}}{\lambda_1^n + \cdots + \lambda_d^n} .$$

c. Si λ_1 n'était pas réel, la matrice réelle M admettrait aussi pour valeur propre $\overline{\lambda_1}$, qui est de même module que λ_1 et différent de λ_1, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Pour $i \in [\![2, n]\!]$, on a $|\lambda_i| < |\lambda_1|$ donc λ_i^n est négligeable devant λ_1^n lorsque $n \to +\infty$. Ainsi, $\dfrac{\mathrm{tr}(M^{n+1})}{\mathrm{tr}(M^n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda_1^{n+1}}{\lambda_1^n} = \lambda_1$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lambda_1$. C'est effectivement ce que l'on obtient à la question **1.b.**

Planche 2

Pour $n \geq 2$, on considère la matrice $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée “en serpent” par les entiers de 1 à n^2, ainsi $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$.

a. Écrire une fonction `f(n,i,j)` retournant le coefficient d'indices (i, j) de la matrice M_n.

b. Écrire une fonction `M(n)` retournant la matrice M_n.

c. Avec Python, afficher le rang de M_n pour $n \in [\![2, 10]\!]$. Faire une conjecture, et la démontrer.

d. Afficher les valeurs de $\dfrac{\mathrm{tr}(M_n)}{n^3}$ pour n de 2 à 100. Commenter.

e. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer $\min\limits_{1\leq j\leq n} (M_n)_{i,j}$ et $\max\limits_{1\leq j\leq n} (M_n)_{i,j}$. En déduire un équivalent de $\mathrm{tr}(M_n)$.

- -

a. *cf.* script.

b. *cf.* script.

c. *cf.* script. On conjecture que $\mathrm{rg}(M_n) = 2$ pour tout $n \geq 2$... et on le prouve! En effet, on peut observer que les colonnes C_1 et C_n sont non proportionnelles, donc $\mathrm{rg}(M_n) \geq 2$, et que, pour tout j, on a la relation

$$C_j = \frac{1}{n-1} \big((n-j)\, C_1 + (j-1)\, C_n\big) .$$

Les colonnes appartiennent donc toutes au plan vectoriel engendré par C_1 et C_n, donc $\mathrm{rg}(M_n) \leq 2$.

d. *cf.* script. Il semblerait que $\dfrac{\mathrm{tr}(M_n)}{n^3}$ tende vers $\dfrac{1}{2}$, autrement dit que $\mathrm{tr}(M_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^3}{2}$.

e. Sur la ligne i, le plus petit coefficient est $(i-1)n + 1$, le plus grand est in.

Donc $(i-1)n \leq m_{i,i} \leq in$ pour tout i. En sommant, on obtient un encadrement de la trace:

$$n^2\,\frac{(n-1)}{2}=\sum_{i=1}^{n} i(n-1)\le\sum_{i=1}^{n}\big(i(n-1)+1\big)\le \mathrm{tr}(M_n)\le\sum_{i=1}^{n} in = n^2\,\frac{(n+1)}{2}\ ,$$

d'où on déduit l'équivalent $\mathrm{tr}(M_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^3}{2}$.

Planche 3

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}-7 & -3 & 0\\ 54 & 8 & -36\\ 3 & -3 & -10\end{pmatrix}$. Soit le vecteur $X_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

1. Pour tout entier naturel n, on note X_n le n-ième itéré de X_0 par A (ou par l'endomorphisme canoniquement associé), c'est-à-dire $X_n=A^n\,X_0$. Faire afficher les X_n pour n de 0 à 15 (*valeurs approchées*). Que remarque-t-on ?

2. Pour travailler avec des valeurs numériques "raisonnables", on norme les X_n à chaque étape, autrement dit on construit une suite de vecteurs (Y_n), avec $Y_0=\frac{X_0}{\|X_0\|}$, puis $Y_{n+1}=\frac{AY_n}{\|AY_n\|}$. Pour n de 1 à 15, afficher le vecteur Y_n ainsi que le produit scalaire $(AY_n|Y_n)$. Conclusion ?

3. Tester avec d'autres vecteurs "initiaux" X_0 construits aléatoirement.

4. En prenant $X_0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, qu'obtient-on avec 20 itérations ? avec 40 itérations ?

5. Utiliser les fonctions du module `numpy.linalg` pour diagonaliser la matrice A.

6. Comment interpréter les résultats des calculs précédents ?

Les notations $(\cdot|\cdot)$ et $\|\cdot\|$ représentent respectivement le produit scalaire canonique et la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Planche 4

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la matrice $A_n=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

1. Écrire une fonction `matrice(n)` qui affiche A_n.

2. Avec Python, afficher les valeurs propres de A_1, A_2, A_3, A_4. Quelle conjecture peut-on faire sur le spectre de A_n ?

3. La matrice A_n est-elle diagonalisable ? Montrer que $\mathrm{Sp}(A_n)\subset\mathbb{R}_+$. *On remarquera que* $\frac{1}{k+1}=\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t$ *pour tout k entier naturel.*

On notera m_n la plus petite valeur propre de A_n.

4. Écrire une fonction `pluspetiteVP(n,p)`, qui prend en arguments deux entiers naturels n et p, et qui représente $k \mapsto m_k$ pour $k \in [\![n,p]\!]$. Tester avec $n=1$ et $p=5$, puis avec $n=5$ et $p=10$. Que peut-on conjecturer ?

5. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = 0$.

6. On note $S^n = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|X\| = 1\}$, où $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^{n+1}$, identifié à $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Justifier l'existence de $M_n = \sup\limits_{X\in S^n} X^\top A_n X$.

- -

1. *cf.* script.

2. *cf.* script.

3. La matrice A_n est symétrique réelle, donc diagonalisable. Notons $A = (a_{i,j})_{0\le i,j\le n}$. En remarquant que $a_{i,j} = \dfrac{1}{i+j+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{i+j}\,\mathrm{d}t$, on déduit facilement que A_n est une matrice symétrique positive, i.e. $X^\top A_n X \ge 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^{n+1}$. Si $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$, alors en effet

$$X^\top A_n X = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \int_0^1 x_i x_j t^i t^j \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(\sum_{i=0}^n x_i t^i\Big)^2 \mathrm{d}t \ge 0\ .$$

On a donc $\mathrm{Sp}(A_n) \subset \mathbb{R}_+$ d'après le cours.

Remarque. On montre sans beaucoup plus d'efforts que les valeurs propres de A_n sont strictement positives: en effet, si $X \in \mathbb{R}^{n+1}$ est non nul, $X^\top A_n X = \displaystyle\int_0^1 \Big(\sum_{i=0}^n x_i t^i\Big)^2 \mathrm{d}t > 0$ par le théorème de stricte positivité puisqu'on intègre sur $[0,1]$ une fonction continue, positive, non identiquement nulle (c'est une fonction polynomiale à coefficients non tous nuls, elle ne peut donc être nulle sur tout le segment $[0,1]$). Les matrices A_n sont donc symétriques définies positives, ce qui entraîne qu'elles sont inversibles.

4. *cf.* script. On conjecture que la suite (m_n) tend (rapidement) vers 0.

5. Posons $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, on sait que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. On voit que $\mathrm{tr}(A_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \le H_{2n+1}$. Or, la trace de A_n est la somme de ses $n+1$ valeurs propres, donc $\mathrm{tr}(A_n) \ge (n+1)\,m_n$. En combinant ces inégalités, on a $(n+1)\,m_n \le H_{2n+1}$, donc $0 \le m_n \le \dfrac{H_{2n+1}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puisqu'il est connu que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = 0$.

6. L'application $X \mapsto X^\top A_n X$, de $\mathbb{R}^{n+1}$ vers $\mathbb{R}$, est continue car "quadratique" (disons "polynomiale" en les coordonnées de X pour utiliser des termes au programme) en dimension finie, donc elle est bornée et atteint ses bornes sur le "compact" (partie fermée bornée) S^n. On en déduit l'existence de $M_n = \max\limits_{X\in S^n} X^\top A_n X$.

On peut montrer que M_n n'est autre que la plus grande valeur propre de la matrice A_n.

Planche 5

Soit la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! y(x) \in \mathbb{R} \qquad \displaystyle\int_x^{y(x)} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$.

3. Programmer sur Python une fonction prenant x comme argument et renvoyant $F(x)$.

4. Programmer sur Python une fonction prenant x comme argument et renvoyant une valeur approchée de $y(x)$ à 10^{-2} près.

- -

1. La fonction $f : t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et F est sa primitive qui s'annule en 0 (théorème fondamental de l'analyse), donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $F'(x) = f(x) = e^{x^2} > 0$. Donc F est continue et strictemlent croissante sur $\mathbb{R}$, elle établit alors une bijection de $\mathbb{R}$ vers son image $F(\mathbb{R})$. La fonction positive f n'étant pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$, ses “intégrales partielles” $F(x)$ tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, et par parité $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$, donc $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2. Le réel x étant fixé, on recherche $y(x)$ réel tel que $F\big(y(x)\big) - F(x) = 1$. Comme F est bijective, cette équation a une solution unique, qui est $y(x) = F^{-1}\big(F(x) + 1\big)$.

3. *cf.* script.

4. *cf.* script.

Planche 6

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{2 - e^x}$. Pour n entier naturel, soit $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

1. Pour n entier naturel non nul, montrer que $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}$. *On pourra utiliser la relation* $(2 - e^x)\, f(x) = 1$.

2. Représenter graphiquement les dix premiers termes de la suite (a_n).

3. Sur le même graphique, faire apparaître les dix premiers termes des suites $b_n = \dfrac{1}{(\ln 2)^n}$ et $c_n = \dfrac{1}{2\,(\ln 2)^n}$. Que peut-on conjecturer ?

4. Démontrer cette conjecture.

5. Montrer que f est développable en série entière sur $]-\ln(2), \ln(2)[$.

- -

1. Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}$. Posons $g(x) = 2 - e^x$, alors g est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}$, la formule de Leibniz donne alors, pour tout n entier naturel, la relation **(*) :** $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} f^{(n-k)}$. Mais on a $fg = 1$, donc $(fg)^{(n)} = 0$ pour $n \geq 1$, et on a $g^{(k)}(x) = -e^x$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en évaluant la relation **(*)** pour $x = 0$, on obtient

$$0 = n!\, a_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,(n-k)!\,a_{n-k}\ ,$$

soit encore $\displaystyle a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}$.

2. 3. *cf.* script. Il semblerait que l'on ait $c_n \leq a_n \leq b_n$. Remarquer que la calcul des factorielles figurant au dénominateur est réalisé "à la volée", c'est plus économique que de faire appel à une fonction `factorielle`.

4. On peut montrer que $a_n \leq b_n$ par récurrence forte:

- c'est vrai pour $n = 0$ puisque $a_0 = b_0 = 1$;
- soit $n \in \mathbb{N}^*$, si c'est vrai pour tout k de 0 à $n-1$, alors

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!\,(\ln 2)^{n-k}} = \frac{1}{(\ln 2)^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!}\ .$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\ln 2)^k}{k!} = e^{\ln(2)} - 1 = 1$, cela donne donc l'inégalité voulue $a_n \leq b_n$.

La série géométrique $\sum b_n x^n = \sum \left(\frac{x}{\ln(2)}\right)^n$ a pour rayon de convergence $\ln(2)$. De $0 \leq a_n \leq b_n$, on déduit par comparaison que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\ln(2)$.

Je ne sais pas démontrer que $c_n \leq a_n$. Si cette inégalité est vraie, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est aussi inférieur ou égal à $\ln(2)$, il est donc égal à $\ln(2)$.

5. Soit $x \in]-\ln(2), \ln(2)[$. Alors la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est absolument convergente, notons $s(x)$ sa somme. Posons aussi $u_0 = 0$ et $u_n = \frac{1}{n!}$ pour $n \geq 1$. La série entière $\sum_{n\geq 0} u_n x^n$ est aussi absolument convergente (son rayon de convergence est $+\infty$) et sa somme vaut $e^x - 1$. D'après le cours, le produit de Cauchy de ces deux séries est alors convergent et a pour somme $(e^x - 1)\, s(x)$, i.e., pour tout $x \in]-\ln(2), \ln(2)[$,

$$(e^x - 1)\, s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} u_k\Big) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}\Big) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = s(x) - 1\ ,$$

d'où $\forall x \in]-\ln(2), \ln(2)[\quad s(x) = \dfrac{1}{2 - e^x} = f(x)$. La fonction f est donc développable en série entière sur $]-\ln(2), \ln(2)[$. Remarquons que $\lim_{x\to(\ln 2)^-} s(x) = +\infty$, ce qui montre que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ ne peut pas être strictement plus grand que $\ln(2)$, il est donc égal à $\ln(2)$.

Planche 7

Soit l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) : \quad xy'' + y' + y = 0 \;.$$

1. Que dire de l'ensemble des solutions de **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$? Que dire de l'ensemble des solutions y de **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$ si l'on impose de plus $y(1) = 1$ et $y'(1) = 0$?

2. Tracer sur un intervalle raisonnable la solution de **(E)** telle que $y(1) = 1$ et $y'(1) = 0$. Représenter des solutions de **(E)** avec d'autres valeurs de $y(1)$ et $y'(1)$.

3. Trouver les solutions de **(E)** développables en série entière sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il en existe une et une seule prenant la valeur 1 en 0, on la notera f par la suite.

4. Montrer que f est décroissante sur le segment $[0, 2]$.

5. Donner une valeur approchée de $f(2)$ à 10^{-4} près.

6. Représenter f avec Python.

- -

1. Le coefficient de y'' ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut mettre l'équation sous forme normale: $y'' = -\dfrac{1}{x}\, y' - \dfrac{1}{x}\, y$, la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On sait que, dans ces conditions, le théorème de Cauchy linéaire s'applique. Il en résulte que l'ensemble des solutions de **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$ est un plan vectoriel (on a affaire à une équation linéaire homogène du second ordre). Il en résulte aussi qu'il existe une seule solution y vérifiant $y(1) = 1$ et $y'(1) = 0$, c'est un problème de Cauchy.

2. *cf.* script.

3. On part de $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on déduit $y' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$, $xy'' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n$. En réinjectant dans **(E)**, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + a_n \Big)\, x^n = 0 \;,$$

puis par unicité du développement en série entière,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+1} = -\frac{a_n}{(n+1)^2} \;,$$

d'où facilement $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n!)^2}\, a_0$. Le rayon de convergence est $+\infty$ (règle de d'Alembert).

Une seule de ces fonctions prend la valeur 1 en 0, c'est $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{(n!)^2}$.

4. Comme f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on la dérive terme à terme:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{n\, x^{n-1}}{(n!)^2} \; .$$

Posons $u_n(x) = \dfrac{n\, x^{n-1}}{(n!)^2}$. Pour tout x réel, la série $\sum_n (-1)^n u_n(x)$ converge car c'est aussi une série entière de rayon de convergence infini, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$. De plus, si $x \in]0, 2]$, alors

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{x}{n(n+1)} \leq \frac{x}{2} \leq 1 \quad \text{pour tout } n \geq 1 \; ,$$

la suite $\big(u_n(x)\big)_{n\geq 1}$ est donc décroissante. Le critère spécial des séries alternées permet alors d'affirmer que $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n(x)$, que l'on peut considérer comme le reste d'ordre 0 de cette série alternée, est de même signe que son premier terme, donc négatif. La fonction f est donc décroissante sur $[0, 2]$.

5. La série définissant $f(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-2)^n}{(n!)^2}$ est aussi alternée, la valeur absolue du terme général décroît (à partir du rang 1) et tend vers zéro, donc le reste est majoré en valeur absolue par le premier terme négligé. On calcule donc une somme partielle de cette série en s'arrêtant dès que le "premier terme négligé" est inférieur à 10^{-4} en valeur absolue, *cf.* script.

6. *cf.* script.

Planche 8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1$.

1. Écrire une fonction `courbe(n)` permettant de représenter f_n sur $[0, 1]$.

2. Montrer que la fonction f_n admet un unique zéro, que l'on notera u_n, dans l'intervalle $[0, 1]$.

3. Écrire une fonction qui prend en argument un entier n et qui retourne une valeur approchée de u_n à 10^{-5} près.

4. Conjecturer le comportement de la suite (u_n).

5. Démontrer votre conjecture.

- -

1. *cf.* script.

2. La fonction f_n est continue et strictement croissante (évident) donc établit une bijection de $[0, 1]$ vers $\big[f(0), f(1)\big] = [-1, n-1]$. Comme 0 appartient à l'intervalle image, il a donc un unique antécédent u_n dans $[0, 1]$.

3. *cf.* script.

4. Ma foi, on dirait bien que (u_n) décroît et tend vers $\frac{1}{2}$, crévindiou!

5. • On note que, pour tout $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. En particulier,

$$f_n(u_{n+1}) \leq f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 = f_n(u_n)\ .$$

Comme la fonction f_n est croissante sur $[0,1]$, on déduit $u_{n+1} \leq u_n$, la suite (u_n) est décroissante.

• Notons que, pour $x \neq 1$, on a aussi $f_n(x) = x\,\dfrac{x^n-1}{x-1} - 1 = \dfrac{x^{n+1}-2x+1}{x-1}$. Pour tout $n \geq 2$, on a donc **(R):** $u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0$. Par ailleurs, pour $n \geq 2$, on a $0 \leq u_n \leq u_2 < 1$, donc $0 \leq u_n^{n+1} \leq u_2^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{n+1} = 0$, la relation **(R)** donne $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2u_n+1) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

Planche 9

Soient $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de f, et tracer sa courbe représentative à la précision 10^{-5}.

2. Montrer que g est définie sur $[-1,1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et tracer g à l'aide de Python. Que peut-on conjecturer ?

3. Calculer f' sur $]-1,1[$. En déduire que $f+g=0$ sur $[-1,1]$.

4. À l'aide d'une intégration par parties et d'un changement de variable, établir une relation entre $g(x)$, $g(1-x)$ et $g(1)$.

5. En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n\, n^2}$.

Planche 10

1. Écrire une fonction Python qui, pour n entier naturel passé comme argument, crée la liste des entiers de 0 à $n-1$, puis qui sélectionne un élément au hasard, le retire de cette liste et le place seul dans une autre liste.

2. Écrire une fonction Python qui réalise l'opération précédente jusqu'à ce que la liste initiale soit vide, et retourne la liste des éléments qui en ont été retirés, dans leur ordre de tirage. Que simule-t-on de cette façon?

3. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$, c'est-à-dire des bijections de $[\![0, n-1]\!]$ vers lui-même.

a. Quel est le cardinal de $\mathcal{S}_n$?

b. Écrire une fonction qui prend comme argument une permutation $f \in \mathcal{S}_n$ (codée sous une forme de votre choix) et qui retourne le nombre de ses points fixes.

c. On note F_n la variable aléatoire qui compte le nombre de points fixes d'une permutation de $\mathcal{S}_n$. Faire une simulation de $N = 500$ tirages (avec remise) de permutations de $\mathcal{S}_n$ avec

$n = 10$. Calculer pour ces tirages les valeurs de F_n, la moyenne observée des valeurs de F_n. Répéter l'expérience avec $N = 1000$ et $n = 1000$. En déduire une conjecture sur l'espérance de F_n.

d. Démontrer cette conjecture. *On pourra introduire les variables aléatoires X_k, $0 \leq k \leq n-1$, telles que $X_k(f) = 1$ si k est un point fixe de f, et $X_k(f) = 0$ sinon.*

4.a. Vérifier expérimentalement $\mathrm{E}(F_n^2) = 2$, puis le démontrer mathématiquement.

b. Quelle est la variance de F_n ?

- -

Corrigé succinct:

1. *cf.* script

2. *cf.* script. On simule ainsi une permutation aléatoire de l'intervalle entier $[\![0, n-1]\!]$. On se persuade facilement du fait qu'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ donnée a une probabilité $\dfrac{1}{n!}$ d'être ainsi générée, on simule donc une loi uniforme sur l'ensemble $\mathcal{S}_n$.

3.a. $|\mathcal{S}_n| = n!$

b. *cf.* script

c. *cf.* script. Il semblerait que $E(F_n) = 1$.

d. Fixons $k \in [\![0, n-1]\!]$. Il y a exactement $(n-1)!$ permutations de l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$ qui fixent l'élément k (autant qu'il y a de permutations de l'ensemble $[\![0, n-1]\!] \setminus \{k\}$). La variable X_k suit alors une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$. Donc $\mathrm{E}(X_k) = \dfrac{1}{n}$ pour tout k. Comme $F_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X_k$, la linéarité de l'espérance donne $\mathrm{E}(F_n) = 1$.

4.a. *cf.* script.

On a $F_n^2 = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X_k\right)^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j$. Comme X_k suit une loi de Bernoulli, on a $X_k^2 = X_k$, donc $\mathrm{E}(X_k^2) = \mathrm{E}(X_k) = \dfrac{1}{n}$ pour tout k. Si $i \neq j$ avec $(i, j) \in [\![0, n-1]\!]^2$, alors la variable $X_i X_j$ prend toujours ses valeurs dans $\{0, 1\}$, donc suit une loi de Bernoulli, et

$$\mathrm{E}(X_i X_j) = P(X_i X_j = 1) = P\big(\{X_i = 1\} \cap \{X_j = 1\}\big) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} .$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathrm{E}(F_n^2) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{E}(X_k^2) + \sum_{i \neq j} \mathrm{E}(X_i X_j) = n \times \frac{1}{n} + n(n-1) \times \frac{1}{n(n-1)} = 2 .$$

b. Par la formule de Koenig-Huygens, $\mathrm{V}(F_n) = \mathrm{E}(F_n^2) - \mathrm{E}(F_n)^2 = 1$.