Planche 17

1. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on introduit la matrice $M(a,b) = \begin{pmatrix} 3a-2b & -6a+6b+3 \\ a-b & -2a+3b+1 \end{pmatrix}$.

On pose $e(a,b) = |\lambda_1 - \lambda_2|$, où λ_1 et λ_2 sont les deux valeurs propres complexes de $M(a,b)$. Écrire une fonction `ecart(a,b)` retournant une valeur approchée à 10^{-2} près de $e(a,b)$.

2.a. Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $0 < p < 1$. Écrire une fonction `hasard(p)` qui, étant donné p, réalise la simulation de 500 valeurs (a,b) du couple aléatoire (A,B), et renvoie le nombre de fois où `ecart(a,b)` est supérieur à 10^{-1}.

b. Pour $p = \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \cdots, \frac{99}{100}$, relier les points de coordonnées $\left(p, \frac{\texttt{hasard}(p)}{500}\right)$.

c. Sur le même graphique, tracer la courbe représentative de $p \mapsto \dfrac{2-2p+p^2}{2-p}$ pour $p \in]0,1[$.

3.a. Montrer que $M(a,b)$ est semblable à $N(a,b) = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

b. À quelle condition $N(a,b)$ est-elle diagonalisable ?

c. Calculer la probabilité de l'événement: "$M(A,B)$ est diagonalisable".

- -

1. et 2. *cf.* script.

3.a. On peut observer que $M(a,b) - (a+1)I_2 = \begin{pmatrix} 2a-2b-1 & -6a+6b+3 \\ a-b & -3a+3b \end{pmatrix}$ est de rang au plus 1 puisque ses colonnes sont liées par la relation $3C_1 + C_2 = 0$, et ceci montre aussi que $a+1 \in \mathrm{Sp}\big(M(a,b)\big)$ et que le vecteur $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $M(a,b)$ pour la valeur propre $a+1$. On cherche alors un vecteur $X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $M(a,b) \cdot X_2 = X_1 + bX_2$, soit $\big(M(a,b) - bI_2\big)X_2 = X_1$, ce qui ramène à l'équation $(a-b)x + (-2a+2b+1)y = 1$, et on voit que $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. On a donc $M(a,b) = P \cdot N(a,b) \cdot P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Si $b \neq a+1$, la matrice $N(a,b)$ admet deux valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable. Si $b = a+1$, elle a alors une seule valeur propre et ce n'est pas une matrice scalaire, elle n'est donc pas diagonalisable.

Bilan: La matrice $N(a,b)$, et donc aussi la matrice $M(a,b)$ qui lui est semblable, est diagonalisable si et seulement si $b \neq a+1$.

c. Notons E l'événement "$M(A,B)$ est diagonalisable". Alors $E = \{B \neq A+1\}$, il est plus facile de travailler sur l'événement contraire $\overline{E} = \{B = A+1\}$. Ainsi, en posant $q = 1-p$,

$$\begin{aligned} P(B = A+1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\big(\{A=k\} \cap \{B=k+1\}\big) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(A=k)\, P(B=k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}pq^k \;=\; p^2 q \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k \\ &= \frac{p^2(1-p)}{1-(1-p)^2}\,. \end{aligned}$$

Donc $P(E) = 1 - P(B = A+1) = \dfrac{2-2p+p^2}{2-p}$.