Suites définies explicitement. Recherches de limites et d'équivalents.

1.a. Soit $u_n = (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$. Montrer que $\ln(u_n) = \ln 3 + \dfrac{1}{n} \ln\left(1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

b. Soient $a > 0$ et $b > 0$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$.

2.a. Donner un développement limité à l'ordre un de $u_n = \sqrt[n]{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$, autrement dit trouver des réels a et b tels que $u_n = a + \dfrac{b}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (3\ \sqrt[n]{2} - 2\ \sqrt[n]{3})^n$.

3. Donner des équivalents simples des suites ci-dessous :

a. $u_n = e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; **b**. $v_n = \sin\left(\pi\, \dfrac{n^2+n+1}{n+1}\right)$; **c**. $w_n = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

4. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n \sim \dfrac{1}{2n}$. Avec une deuxième intégration par parties, obtenir un développement limité à l'ordre deux de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

5.a. Pour n entier naturel, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$. Montrer que $S_n \sim n!$ lorsque n tend vers l'infini.

b. Écrire le développement limité à l'ordre trois, lorsque n tend vers $+\infty$, de $u_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$

6. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln k$.

a. Justifier, pour tout entier naturel non nul k, l'encadrement $\ln k \le \displaystyle\int_k^{k+1} \ln x\,\mathrm{d}x \le \ln(k+1)$.

b. En déduire un encadrement de S_n, puis un équivalent de S_n.

c. Plus précisément, donner un développement asymptotique de S_n avec deux termes non nuls et un reste.

d. Démontrer, en partie en utilisant les résultats précédents, l'encadrement $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \le n! \le n^n$.

e. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

7.a. Transformer en produits les expressions $\cos p - \cos q$ et $\sin p - \sin q$, avec p et q réels. *On pourra utiliser les exponentielles complexes.*

b. Montrer que la suite (u_n), telle que $u_n = \sin(n)$, est divergente.

Suites définies par récurrence.

8. Exemples d'études de suites récurrentes

a. $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$;

b. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,(1 + u_n^2)$;

c. $u_0 \in \mathbb{R}$ (*discuter*) et $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$;

d*. $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$ (*étudier les suites extraites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1})).

9. Soit une suite (u_n) telle que $u_0 > 0$, $u_1 > 0$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \dfrac{1+u_n}{1+u_{n+1}}\, u_{n+1}$.

a. Montrer qu'il existe un réel strictement positif a tel que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \dfrac{a}{1+u_n}$.

b. En étudiant les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), montrer la convergence de la suite (u_n).

10. Soit $a \in \mathbb{C}$, soit $u = (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \quad , \quad u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = a\, u_{n+1} + (1-a)\, u_n \ .$$

Étudier la convergence de cette suite.

11. Soit $a > 0$, soit la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k}$.

a. Montrer que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1, et tend vers $+\infty$.

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n)$.

Suites définies implicitement.

12.a. Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution, notée x_n, dans l'intervalle $I_n = \left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[\quad (n \in \mathbf{Z})$.

b. Donner le développement asymptotique de x_n à la précision $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. *On pourra utiliser, après l'avoir démontrée, la relation*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \ .$$

c*. Écrire le développement asymptotique de x_n à la précision $o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

13. Montrer que, pour tout n entier naturel, l'équation $x\, e^x = \sqrt{n}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$, que l'on notera x_n. Donner un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit P_n la fonction polynôme définie par $P_n(x) = x^n + x - 3$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet une unique racine réelle positive, que l'on notera x_n. Montrer que $x_n \in]1, 2[$. Déterminer le signe de $P_{n+1}(x_n)$, en déduire que la suite (x_n) est décroissante. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$. Donner un équivalent simple de $x_n - 1$.

15. Montrer que la relation $n\, u_n^{n+1} - (n+1)\, u_n^n = 1$ définit une unique suite positive $(u_n)_{n\geq 1}$. Déterminer sa limite.

16.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution, que l'on notera x_n, dans $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

c. Donner un développement asymptotique de x_n avec trois termes non nuls, plus un reste.

Autres exercices sur les suites. Ensembles dénombrables.

17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3\,.$$

a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f\left(\frac{x}{2} + 3\right) = \frac{f(x)}{2} + 3.$

b. En déduire que f' est constante sur $\mathbb{R}$.

c. Expliciter f.

18. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(1) \neq 0$. Pour tout n entier naturel, on pose $I_n = \int_0^1 x^n\, f(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, puis que $I_n \sim \frac{f(1)}{n}$.

19. Théorème de Cesàro

a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ (v_n est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite u). On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

b. Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n) = l$ ($l \in \mathbb{R}$). Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = l$.

c. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$ avec $l \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

d. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

20*. Soit (u_n) une suite réelle bornée. Pour tout n entier naturel, on pose

$$v_n = \inf_{k\geq n} u_k \qquad \text{et} \qquad w_n = \sup_{k\geq n} u_k\,.$$

a. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont toutes deux convergentes, et comparer leurs limites.

b. Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

21. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs. Pour tout n, on pose $y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}$.

a. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ lorsque (x_n) est une suite constante de valeur $a > 0$.

b. Même question lorsque $x_n = a\, b^{2^n}$ avec $a > 0$, $b > 0$.

c*. Montrer que (y_n) converge si et seulement s'il existe un réel positif M tel que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \leq M^{2^n}$.

22*. Une suite réelle (a_n) est dite **convexe** si on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leq \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$. Elle est dite **concave** si la suite $(-a_n)$ est convexe.

a. Par quelle propriété simple de la suite (d_n), de terme général $d_n = a_{n+1} - a_n$, se traduit la convexité d'une suite réelle (a_n) ? Quelles sont les suites réelles qui sont à la fois convexes et concaves ?

b. Soit (a_n) une suite convexe majorée. Montrer qu'elle est décroissante.

c. Dans cette question, (a_n) est une suite convexe bornée et on pose $d_n = a_{n+1} - a_n$ pour tout n.

i. Montrer que la suite (a_n) est convergente.

ii. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geq 2p$. Prouver les inégalités $2(a_n - a_p) \leq n d_{n-1} \leq 0$.

iii. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n d_n = 0$.

23.a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

b. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ est infini non dénombrable. *On pourra supposer qu'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et chercher une contradiction en considérant l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \varphi(n)\}$.*

Exercices avec Python.

24. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k - 1$.

a. Écrire une fonction `courbe(n)` permettant de représenter f_n sur $[0,1]$.

b. Montrer que la fonction f_n admet un unique zéro, que l'on notera u_n, dans l'intervalle $[0,1]$.

c. Écrire une fonction qui prend en argument un entier n et qui retourne une valeur approchée de u_n à 10^{-5} près.

d. Conjecturer le comportement de la suite (u_n), puis démontrer votre conjecture.

25. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle. Pour $n \geq 1$, et $(a,b) \in [0,1]^2$ avec $a < b$, on pose

$$c_n(a,b) = \mathrm{Card}\Big(\big\{k \in [\![1,n]\!] \mid u_k - \lfloor u_k \rfloor \in [a,b]\big\}\Big) .$$

C'est donc le nombre de termes de la suite u (parmi les n premiers) dont la "partie fractionnaire" est comprise entre a et b. La suite u est dite **équirépartie modulo 1** si, pour tout $(a,b) \in [0,1]^2$ avec $a < b$, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} c_n(a,b) = b - a$.

a. Écrire une fonction Python d'arguments u, n, a, b renvoyant $c_n(a,b)$.

b. La tester avec $u_n = \sqrt{n}$, avec $u_n = \ln(n)$, avec $u_n = \alpha^n$ où $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $(a,b) = \Big(\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\Big)$. Que conjecturez-vous ?

c. Soit u définie par $u_n = \Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n$.

(i). Quelles sont les suites réelles w telles que $w_{n+2} = w_n + w_{n+1}$ pour tout n ?

(ii). Trouver une suite v de limite nulle telle que $u + v$ soit à valeurs entières.

(iii). En déduire que u n'est pas équirépartie modulo 1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{c_n(a,b)}{n}$ pour tout couple $(a,b) \in [0,1]^2$ avec $a < b$. Tester expérimentalement.