Séries à termes positifs.

1. Déterminer la nature des séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$, avec $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ et $v_n = a^{\sqrt{n}}$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$.

2. Pour quelles valeurs de l'entier naturel p la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{n^{np}}{(np)!}$ est-elle convergente ?

3. Soit $u_n = \left(\cos \dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Donner un équivalent de $v_n = \ln(u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Déterminer l'ensemble I des réels α tels que la série $\sum_n u_n$ soit grossièrement divergente.

c. Si $\alpha \notin I$, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2\, u_n$. Que dire alors de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n$?

4. Calculer les sommes des séries ci-dessous après avoir justifié leur convergence :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \qquad ; \qquad T = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) .$$

5. Sommes partielles de la série harmonique

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, puis $a_n = \ln n - H_n$.

a. Donner un équivalent de $a_{n+1} - a_n$. En déduire que la suite (a_n) converge.

b. En déduire que H_n admet un développement asymptotique de la forme $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, où γ est un réel (appelé **constante d'Euler**).

c. Calculer $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$.

6. Séries de Bertrand

On appelle ainsi les séries $\displaystyle\sum_{n \geq 2} u_n$, avec $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha\, (\ln n)^\beta}$, où α et β sont deux réels. On se propose d'étudier leur convergence.

a. On suppose $\alpha > 1$. En étudiant $n^\gamma u_n$, pour un choix convenable de γ, montrer que la série converge.

b. On suppose $\alpha < 1$. En considérant $n u_n$, montrer que la série diverge.

c. On suppose $\alpha = 1$. Par comparaison à une intégrale, discuter de la nature de la série $\sum u_n$.

7. Donner un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln k}$

8. Pour tout $x > 0$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$. Justifier l'existence de $S(x)$ et donner un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ (*pour cela, on pourra utiliser un encadrement par des intégrales*).

9. On pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Montrer que $R_n \sim \dfrac{1}{(n+1)!}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k$, puis $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

10. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente. Pour tout n, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

a. Démontrer la relation $\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} k u_k = (n+1)\, R_n$.

b. En supposant la série $\sum n u_n$ convergente, montrer que $(n+1)\, R_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k u_k$.

c. En déduire que les séries $\sum_{n\geq 0} n\, u_n$ et $\sum_{n\geq 0} R_n$ sont de même nature et que, en cas de convergence, elles ont la même somme.

11. Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$.

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)}$. Quelle est la nature de la série $\sum f(n)$?

12. Soit $\alpha > 0$. On considère une suite réelle (u_n), définie par

$$u_1 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha\, u_n}\ .$$

Pour quelles valeurs de α la suite (u_n) est-elle convergente ?

13*. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout n.

a. Montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{S_{n-1}}$ est de même nature que la série $\sum u_n$.

En cas de divergence de cette dernière, on écrira un encadrement de l'intégrale $\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

b. On suppose que la série $\sum u_n$ diverge. Montrer que, pour tout $\alpha > 1$, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

c. On suppose que la série $\sum u_n$ converge, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ pour tout n. Montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{R_n}$ est divergente.

14.a. Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs, soit α un réel positif. On suppose que la série de terme général $n^\alpha u_n$ converge. En encadrant l'expression $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} k^\alpha u_k$, montrer que $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha+1} u_n = 0$.

b*. Donner un exemple de série à termes positifs $\sum u_n$, convergente, telle que la suite $(n\, u_n)$ ne tende pas vers zéro.

Séries alternées.

15. Nature de la série $\sum\limits_{n \geq 2} u_n$ dans chacun des cas suivants ?

a) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$; **b)** $u_n = \sin\left(\dfrac{n^3+1}{n^2+1}\,\pi\right)$; **c)** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.

16. Nature des séries $\sum\limits_{n \geq 2} u_n$ et $\sum\limits_{n \geq 2} v_n$, avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln\big(n + (-1)^n\big)}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n}$.

17. En utilisant l'égalité $\dfrac{1}{n+1} = \displaystyle\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t$, calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad ; \quad B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad ; \quad C = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right) .$$

18. Soit (a_n) une suite définie par la donnée de $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la relation de récurrence $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.

a. Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n} (-1)^n a_n$.

b. Montrer que $\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \sim -\dfrac{a_n}{2}$. En déduire que la série $\sum\limits_{n} a_n$ diverge.

19. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe un réel α tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

a. On pose $v_n = n^\alpha u_n$. Montrer que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ est convergente.

b. En déduire l'existence d'une constante strictement positive K telle que $u_n \sim \dfrac{K}{n^\alpha}$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

c. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^n}{n!\, e^n}$.

20. En utilisant la formule de Stirling, calculer $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

21. Pour tout n entier naturel, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

a. Justifier l'existence de R_n.

b. Montrer que $R_n + R_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.

c. En déduire un équivalent de R_n.

d. Quelle est la nature de la série de terme général R_n ?

22*. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $p_n = n!\, u_n$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} \leq e \leq u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$. En déduire que le nombre e est irrationnel.

b. Montrer que p_n est un entier naturel pour tout n. Écrire une relation de récurrence vérifiée par p_n. En déduire la parité de p_n.

c. Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \sin(\pi\, e\, n!)$? *On écrira* $\sin(\pi\, e\, n!) = \sin\left[\pi(p_n + t_n)\right]$ *et on donnera un encadrement de* t_n.

23. Soit x un réel non multiple de 2π. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

a. Montrer que la suite (S_n) est bornée.

b. En remarquant que $\cos(nx) = S_n - S_{n-1}$, montrer que la série de terme général $u_n = \frac{\cos(nx)}{n}$ est convergente.

c. En exploitant l'inégalité $|\cos(\theta)| \geq \cos^2(\theta)$, montrer la divergence de la série $\sum |u_n|$.

24.a. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\, e^{int}\, \mathrm{d}t = 0$.

b. Soit $x \in]0, 2\pi[$, soit n un entier naturel non nul. Prouver l'identité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx} - e^{ik\pi}}{ik} = -\frac{1}{2i} \int_\pi^x \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin\frac{t}{2}} (1 - e^{int})\, \mathrm{d}t\ .$$

c. Convergence et somme de $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k}$.

Autres exercices sur les séries.

25. On note l^1 l'ensemble des suites réelles **sommables**, c'est-à-dire des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ soit absolument convergente.

On note l^2 l'ensemble des suites réelles **de carré sommable**, c'est-à-dire des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ soit (absolument) convergente.

a. Montrer que l^1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b. Montrer que $l^1 \subset l^2$, et montrer que cette inclusion est stricte.

c. Soient $u \in l^2$, $v \in l^2$. Montrer que $uv \in l^1$, où uv est la suite réelle définie par $(uv)_n = u_n v_n$.

d. En déduire que l^2 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

e. Pour $u \in l^2$, $v \in l^2$, on pose $< u, v >= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur l^2.

26. On admet le développement asymptotique $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a. En déduire la somme de la série harmonique alternée

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

b. On modifie l'ordre des termes de cette dernière série de la façon suivante:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} + \cdots$$

Montrer que la nouvelle série obtenue converge et calculer sa somme.

c. Plus généralement, soient p et q deux entiers naturels non nuls. On considère une série construite à partir de la série harmonique alternée en sommant alternativement p termes impairs (positifs), puis q termes pairs (négatifs), et ainsi de suite. Quelle est la somme de cette série ?

27*. Soit $\sum a_n$ une série de nombres complexes, absolument convergente. Soit σ une permutation de l'ensemble des entiers naturels, c'est-à-dire une bijection de $\mathbb{N}$ sur lui-même. Montrer que la série $\sum a_{\sigma(n)}$ converge, et prouver l'égalité des sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

28. Soit (a_n) une suite de réels **non nuls**. On dit que "le **produit infini** $\prod a_n$ converge" si la suite (P_n) définie par $P_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$ admet une limite réelle **non nulle**. Dans ce cas, on note alors $\prod_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} P_n$.

a. Calculer, après avoir justifié leur existence, les produits infinis

$$P = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) \qquad ; \qquad Q = \prod_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

b. Soit (u_n) une suite de réels positifs. Montrer que le produit infini $\prod(1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge, mais que le produit infini $\prod(1+u_n)$ converge.

29. Soit $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$ pour $n \geq 2$.

a. Montrer qu'il existe un réel α tel que $\ln(P_n) = -\frac{1}{2}\ln(n) + \alpha + o(1)$.

b. En déduire que $P_n \sim \frac{K}{\sqrt{n}}$, avec $K > 0$.

Exercices avec Python.

30. On rappelle le développement asymptotique $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note n_p le plus petit entier naturel n pour lequel $H_n \geq p$:

$$n_p = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid H_n \geq p\} \ .$$

a. Justifier l'existence de n_p et montrer que $\lim_{p \to +\infty} n_p = +\infty$.

b. En utilisant Python, faire afficher les valeurs de n_p inférieures à 10^6, ainsi que leurs logarithmes.

c. En utilisant le développement asymptotique donné en préambule, montrer que

$$\ln(n_p) = p - \gamma + o(1) \ .$$

d. Comparer le résultat du **c.** avec les valeurs expérimentales. En déduire une valeur approchée de la constante d'Euler γ.

e. Déduire du **c.** la limite de $\frac{n_{p+1}}{n_p}$, puis vérifier expérimentalement.

31. On étudie la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

a. Quelle est sa nature ?

b. On note S la somme de la série, et on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ ses sommes partielles. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$.

c. Avec Python, trouver n tel que $S_n \leq S \leq S_n + 10^{-4}$.

d. Représenter les points de coordonnées (n, S_n) pour $n \leq 200$.

e. On permute les termes: $T_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \cdots$ (n termes), en alternant un terme positif, deux termes négatifs, dans l'ordre. Représenter les points (n, T_n) avec $n \leq 200$.

f. Même question avec deux termes positifs puis un négatif.