EXERCICES CORRIGÉS de MATHÉMATIQUES sur les SUITES
PSI2 2024-2025

Suites définies explicitement. Recherches de limites et d'équivalents.

1.a. Soit $u_n = (2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$. Montrer que $\ln u_n = \ln 3 + \dfrac{1}{n} \ln\left(1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

b. Soient $a>0$ et $b>0$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$.

- -

a. L'idée est de mettre en facteur le terme prépondérant (3^n) dans l'argument du logarithme :

$$\ln u_n = \frac{1}{n}\ \ln(2^n+3^n) = \frac{1}{n}\ \ln\left[3^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right] = \ln 3 + \frac{1}{n}\ \ln\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

On en déduit facilement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = \ln 3$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ par continuité de la fonction exponentielle.

b. On reprend la même idée, ce qui oblige à une discussion :

- si $a>b$, $\ln u_n = \ln a + \dfrac{1}{n}\ \ln\left(1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln a$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$;

- si $a<b$, en échangeant les rôles de a et b dans le calcul précédent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = b$;

- si $a=b$, alors $u_n = (2\ a^n)^{\frac{1}{n}} = a\ \sqrt[n]{2} = a\ e^{\frac{1}{n}\ln 2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a = b$.

Bilan : $\lim\limits_{n\to+\infty} (a^n+b^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a,b\}$.

2.a. Donner un développement limité à l'ordre un de $u_n = \sqrt[n]{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$, autrement dit trouver des réels a et b tels que $u_n = a + \dfrac{b}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (3\ \sqrt[n]{2} - 2\ \sqrt[n]{3})^n$.

- -

a. $u_n = 2^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln 2} = 1 + \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, en utilisant le développement limité $e^x = 1+x+o(x)$ au voisinage de zéro.

b. Posons $x_n = (3\ \sqrt[n]{2} - 2\ \sqrt[n]{3})^n$. En développant comme en **a.**, on obtient

$$3\ \sqrt[n]{2} - 2\ \sqrt[n]{3} = 3\left(1+\frac{\ln 2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2\left(1+\frac{\ln 3}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{3\ln 2 - 2\ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc $\ln x_n = n\ \ln(3\ \sqrt[n]{2} - 2\ \sqrt[n]{3}) = n\ \ln\left(1+\dfrac{3\ln 2-2\ln 3}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3\ln 2 - 2\ln 3$, en utilisant l'équivalent $\ln(1+x)\sim x$ au voisinage de zéro ou, ce qui revient au même, le développement limité $\ln(1+x) = x+o(x)$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = e^{3\ln 2 - 2\ln 3} = \dfrac{2^3}{3^2} = \dfrac{8}{9}$.

---

3. Donner des équivalents simples des suites ci-dessous :

a. $u_n = e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$; **b.** $v_n = \sin\left(\pi\ \dfrac{n^2+n+1}{n+1}\right)$; **c.** $w_n = \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

- -

a. Il faut développer $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ à l'ordre un : pour cela,

$$n\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = n\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\big(\frac{1}{n^2}\big)\Big) = 1-\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

en utilisant le DL à l'ordre deux $\ln(1+x) = x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ au voisinage de zéro. En utilisant maintenant $e^x = 1+x+o(x)$ au voisinage de zéro, on obtient

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\Big(1-\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) = e\cdot\exp\Big(-\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) = e\ \Big(1-\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\ .$$

Finalement, $u_n = e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \sim \dfrac{e}{2n}$.

b. Utilisons la propriété $\sin(\pi+x) = -\sin x$, qui donne, par une récurrence immédiate $\sin(n\pi+x) = (-1)^n\sin x$ pour $n\in\mathbf{Z}$ et x réel. En décomposant $n^2+n+1 = n(n+1)+1$ (*c'est la division euclidienne du numérateur par le dénominateur*), on a

$$v_n = \sin\left(\pi\ \frac{n^2+n+1}{n+1}\right) = \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\ .$$

Comme $\sin x\sim x$ au voisinage de zéro, on déduit $v_n \sim \dfrac{(-1)^n\,\pi}{n+1} \sim (-1)^n\,\dfrac{\pi}{n}$.

c. Écrivons $w_n = \exp(x_n)$, avec

$$x_n = n\ \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n\ \Big(-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) = -\sqrt{n}-\frac{1}{2}+o(1)$$

en utilisant le DL à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. On en déduit

$$w_n = \exp(x_n) = e^{-\sqrt{n}}\,e^{-\frac{1}{2}}\,e^{o(1)}\ ,\quad \text{donc}\quad w_n\sim e^{-\sqrt{n}}\,e^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{e}}$$

puisque $e^{o(1)}$ est l'exponentielle d'une expression qui tend vers zéro, c'est donc une expression qui tend vers 1.

---

4. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n\sim\dfrac{1}{2n}$. Avec une deuxième intégration par parties, obtenir un développement limité à l'ordre deux de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- -

• Pour montrer que I_n tend vers zéro (et puisqu'il semble impossible d'expliciter plus cette intégrale), encadrons-la : pour $x\in[0,1]$, on a $0\leq\dfrac{x^n}{1+x}\leq x^n$, donc $0\leq I_n\leq\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1}$. Il résulte alors du théorème d'encadrement ("des gendarmes") que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

• *Quelques remarques méthodologiques : une intégration par parties permet d'écrire une intégrale comme une somme de deux termes, à savoir* $\int u'v = [uv] - \int uv'$. *Pour que cela nous fournisse un équivalent de l'intégrale, il faut que l'un des deux termes soit négligeable devant l'autre, cela peut guider pour le choix de l'intégration par parties à effectuer.*

Ici, posons $u' = x^n$ et $v = \dfrac{1}{1+x}$, on obtient

$$I_n = \Big[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)}\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n+1}\,\frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}\,J_n \qquad \textbf{(*)}$$

avec $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$. Un raisonnement analogue à celui fait ci-dessus montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$, d'où il résulte que $I_n \sim \dfrac{1}{2(n+1)} \sim \dfrac{1}{2n}$.

• Effectuons une nouvelle intégration par parties (*on ne change pas une équipe qui gagne!*), on obtient

$$J_n = \frac{1}{4(n+2)} + \frac{2}{n+2}\,K_n\ , \quad \text{avec} \quad K_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x\ .$$

Par les mêmes méthodes, on montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n = 0$, donc $J_n \sim \dfrac{1}{4(n+2)} \sim \dfrac{1}{4n}$ et $\dfrac{1}{n+1}\,J_n \sim \dfrac{1}{4n^2}$, soit $\dfrac{1}{n+1}\,J_n = \dfrac{1}{4n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. Reprenons le développement **(*)** ci-dessus, avec $\dfrac{1}{2(n+1)} = \dfrac{1}{2n}\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{-1} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$, on en déduit le développement limité à l'ordre deux :

$$I_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\ .$$

5.a. Pour n entier naturel, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$. Montrer que $S_n \sim n!$ lorsque n tend vers l'infini.

b. Écrire le développement limité à l'ordre trois, lorsque n tend vers $+\infty$, de $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$

- -

a. On a l'encadrement

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} k! \;-\; n! = \sum_{k=1}^{n-1} k! \le (n-2)\times(n-2)! + (n-1)!$$

et cette expression majorante est négligeable devant $n!$ car

$$\frac{(n-2)\times(n-2)! + (n-1)!}{n!} = \frac{n-2}{n(n-1)} + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

De l'encadrement, il résulte que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \;-\; n! = o(n!)$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \;\sim\; n!$

b. Pour obtenir un développement de u_n, il suffit de mettre de côté les quatre derniers termes de la somme (qui seront prépondérants) ; en sommant dans l'ordre des indices décroissants, on a :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-4} k!\ ,$$

et (*cf.* étude ci-dessus) : $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-4} k! \sim \frac{(n-4)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \sim \frac{1}{n^4} = o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$. Il reste donc à développer à l'ordre trois les premiers termes, cela donne, après calculs :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\ .$$

---

6. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $\displaystyle S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln k$.

a. Justifier, pour tout entier naturel non nul k, l'encadrement $\displaystyle\ln k \leq \int_k^{k+1} \ln x\,\mathrm{d}x \leq \ln(k+1)$.

b. En déduire un encadrement de S_n, puis un équivalent de S_n.

c. Plus précisément, donner un développement asymptotique de S_n avec deux termes non nuls et un reste.

d. Démontrer, en partie en utilisant les résultats précédents, l'encadrement $\displaystyle\Big(\frac{n}{e}\Big)^n \leq n! \leq n^n$.

e. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

- -

a. La fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc si $x \in [k, k+1]$, on a $\ln k \leq \ln x \leq \ln(k+1)$. En intégrant cette inégalité sur le segment $[k, k+1]$, on obtient l'encadrement

$$\ln k \leq \int_k^{k+1} \ln x\,\mathrm{d}x \leq \ln(k+1)\ .$$

b. Par décalage d'indice, on déduit, pour $k \geq 2$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln x\,\mathrm{d}x \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln x\,\mathrm{d}x$ et, en sommant pour k de 2 à n, on trouve (en utilisant la relation de Chasles) :

$$\int_1^n \ln x\,\mathrm{d}x \leq S_n \leq \int_2^{n+1} \ln x\,\mathrm{d}x\ ,$$

soit **(*)** : $n\ \ln n - n + 1 \leq S_n \leq (n+1)\ \ln(n+1) - n + 1 - 2\ \ln 2$. Or, le minorant $m_n = n\ \ln n - n + 1$ et le majorant $M_n = (n+1)\ \ln(n+1) - n + 1 - 2\ \ln 2$ sont tous deux équivalents à $n\ln n$ (facile pour le minorant puisque les termes n et 1 sont négligeables devant $n\ln n$, et pour le majorant je laisse le lecteur vérifier que $(n+1)\ \ln(n+1) \sim n\ \ln n$... mais le lecteur flemmard constatera que cela résulte aussi des calculs faits dans le corrigé de la question suivante), donc $S_n \sim n\ \ln n$, en vertu du théorème d'encadrement (dit "des gendarmes").

c. Un développement asymptotique à deux termes de m_n est clairement $m_n = n\ln n - n + o(n)$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}(n+1)\ \ln(n+1) &= (n+1)\left[\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=(n+1)\left(\ln n+\frac{1}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)\\ &= n\ \ln n+o(n)\ ,\end{aligned}$$

donc le majorant M_n admet le même développement asymptotique à deux termes $M_n = n\ \ln n - n + o(n)$. Finalement, l'expression S_n, "coincée" entre m_n et M_n, admet le même développement

$$S_n = n\ \ln n - n + o(n)\ .$$

d. L'inégalité $n! \leq n^n$ est classique puisque

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n \leq n \times \times \cdots \times n = n^n$$

(même nombre de facteurs). Pour l'autre inégalité, grâce à la croissance de la fonction exponentielle, il suffit de montrer l'inégalité entre les logarithmes, soit $n\ln n - n \leq \ln(n!) = S_n$, or cette inégalité résulte de celles qui ont été démontrées à la question **b.**

e. D'après **d.**, on a $\sqrt[n]{n!} \geq \dfrac{n}{e}$ donc, par comparaison, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

7.a. Transformer en produits les expressions $\cos p - \cos q$ et $\sin p - \sin q$, avec p et q réels. *On pourra utiliser les exponentielles complexes.*

b. Montrer que la suite (u_n), telle que $u_n = \sin(n)$, est divergente.

- -

a. On a $e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p-q}{2}}\right) = 2i\,\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}$. En séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient les formules "de transformation de sommes en produits" (factorisations):

$$\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\ .$$

b. Supposons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sin(n) = l$. Alors, par décalage, on a aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sin(n+2) = l$, donc $\sin(n+2) - \sin(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, soit $2\ \sin(1)\ \cos(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme $\sin(1)$ est une constante non nulle, il en résulte que $\cos(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par décalage $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\cos(n) = 0$. On a donc aussi $\cos(n+2) - \cos(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, soit après transformation, $-2\ \sin(n+1)\ \sin(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De la même façon, on déduit $\sin(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, soit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sin(n) = \lim_{n\to+\infty}\cos(n) = 0$. Mais ceci est incompatible avec la relation fondamentale de la trigonométrie $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 0$, on a donc obtenu une contradiction. La suite de terme général $\sin(n)$ est donc divergente.

Suites définies par récurrence.

8. Exemples d'études de suites récurrentes

a. $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$;

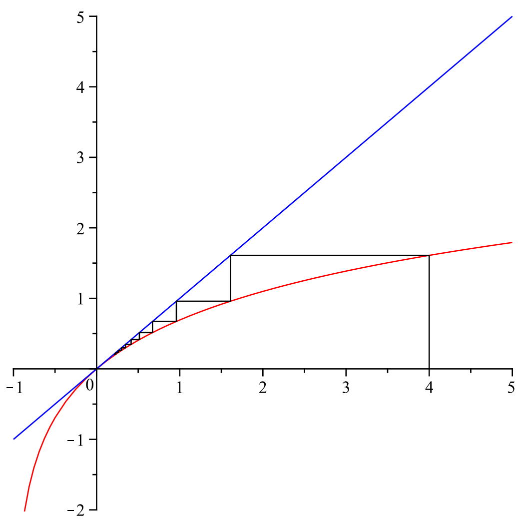
b. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,(1 + u_n^2)$;

c. $u_0 \in \mathbb{R}$ (*discuter*) et $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$;

d*. $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$ (*étudier les suites extraites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1})).

- -

a. Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$; on a $D_f =]-1, +\infty[$ et l'intervalle $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ est stable par f : la suite (u_n) est donc bien définie, et $u_n > 0$ pour tout n, ainsi la suite est minorée par 0. Par ailleurs, on a l'**inégalité classique** $\forall x \in]-1, +\infty[\quad \ln(1+x) \leq x$, autrement dit $f(x) \leq x$: il en résulte que, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée, donc elle converge. Sa limite est alors un point fixe de f, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (c'est le seul point fixe de f).

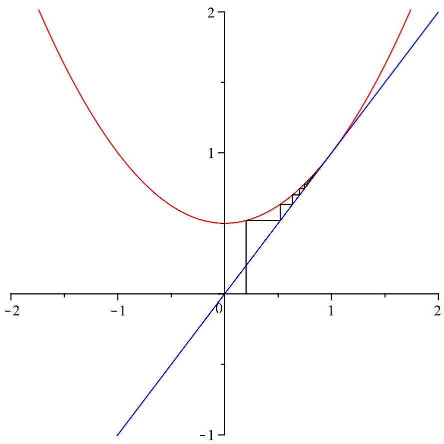


b. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}(1+x^2)$. On observe graphiquement, puis on vérifie facilement par le calcul, que $\forall x \in \mathbb{R}\quad f(x) \geq x$; en effet, $f(x) - x = \dfrac{1}{2}(1+x^2) - x = \dfrac{1}{2}(x-1)^2 \geq 0$. La suite (u_n) est donc croissante, et ceci quel que soit le choix de u_0.

De façon évidente, $f(x) = x \iff x = 1$. La seule limite possible est donc 1.

- Si $u_0 > 1$, alors la suite (u_n), croissante, ne peut converger vers 1, donc elle diverge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $u_0 < -1$, alors $u_1 > 1$ et on est ramené au cas précédent.
- Si $-1 \leq u_0 \leq 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}\quad -1 \leq u_n \leq 1$ car l'intervalle $[-1, 1]$ est stable par f :

nous avons en effet $f\big([-1,1]\big) = \left[\dfrac{1}{2},1\right] \subset [-1,1]$. La suite est alors croissante et majorée, donc convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ (seule limite possible). *Dessin avec* $u_0 = 0,2$:



c. Soit $f : x \mapsto \sqrt{2-x}$, alors $D_f =]-\infty, 2]$. Discutons déjà de la définition de la suite :

- si $u_0 > 2$, alors $u_0 \notin D_f$, donc on ne peut définir u_1 ;
- si $u_0 < -2$, alors $u_1 > 2$ et on ne peut définir u_2 ;
- si $u_0 \in [-2,2]$, alors u_n est bien défini pour tout n : en effet, l'intervalle $[-2,2]$ est stable par f puisque $f\big([-2,2]\big) = \big[f(2), f(-2)\big] = [0,2] \subset [-2,2]$. Nous ne considérerons désormais que ce cas.

En prenant donc $u_0 \in [-2,2]$, on a alors $u_1 \in [0,2]$, puis $u_2 \in f\big([0,2]\big) = [0,\sqrt{2}]$. Ce dernier intervalle est stable par f puisque $f\big([0,\sqrt{2}]\big) = \left[\sqrt{2-\sqrt{2}}\ ,\ \sqrt{2}\right] \subset [0,\sqrt{2}]$. Ainsi, u_n appartient à l'intervalle $J = [0,\sqrt{2}]$ pour tout $n \geq 2$. Or, dans cet intervalle (stable par f), l'application f est **contractante**, c'est-à-dire lipschitzienne avec un rapport strictement inférieur à 1 : en effet, $|f'(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}$ admet pour maximum sur J la valeur $k = |f'(\sqrt{2})| = \dfrac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$, et on vérifie à l'aide d'une calculatrice que $k \simeq 0,653$, donc $k < 1$. D'après les inégalités d'accroissements finis, on a

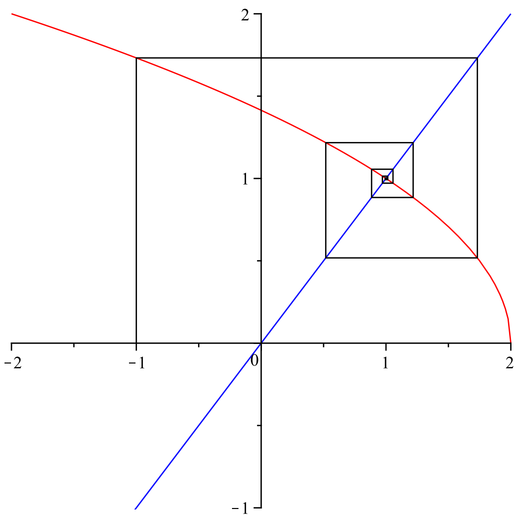
$$\forall (x,y) \in J^2 \qquad |f(x) - f(y)| \leq \Big(\max_{t\in J} |f'(t)|\Big)\,|x-y| = k\,|x-y|\ .$$

On note que $f(1) = 1$ (le nombre 1 est un point fixe de f appartenant à J), puis

$$\forall n \geq 2 \qquad |u_{n+1} - 1| = \big|f(u_n) - f(1)\big| \leq k\,|u_n - 1|$$

donc, par une récurrence immédiate, pour $n \geq 2$, $|u_n - 1| \leq k^{n-2}\,|u_2 - 1|$. Comme $0 < k < 1$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Remarque. Comme la fonction f est décroissante sur J, la suite (u_n) n'est pas monotone, elle est "oscillante", c'est-à-dire que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont toutes deux monotones de sens contraires (*cf.* TD sur les suites récurrentes), ici ces deux suites extraites sont adjacentes puisqu'elles convergent toutes deux vers 1.



d. Soit $f : x \mapsto 1 - x^2$. L'intervalle $[0,1]$ est stable par f, donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [0,1]$, donc, si (u_n) converge, sa limite est dans $[0,1]$ (intervalle fermé).

De plus, $f(x) = x \iff x^2 + x - 1 = 0$ et la seule racine, dans $[0,1]$, de cette équation, est $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$: c'est donc la seule limite possible pour (u_n).

La fonction f est décroissante sur $[0,1]$, donc la suite (u_n) n'est pas monotone, mais les deux suites extraites (v_n) et (w_n), définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ respectivement, sont monotones et de sens de variation contraires.

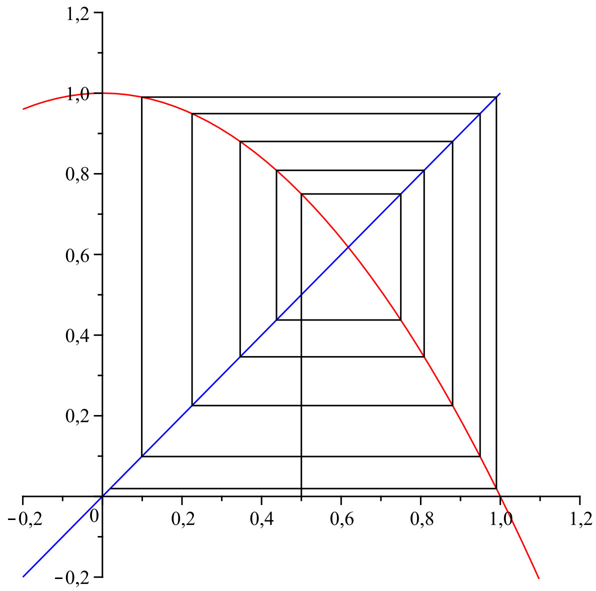
Nous remarquons aussi que $f\big(]0,\alpha[\big) =]\alpha,1[$ et $f\big(]\alpha,1[\big) =]0,\alpha[$; chacun de ces deux intervalles est donc stable par $g = f \circ f$. Comme $u_0 = \dfrac{1}{2} \in \,]0,\alpha[$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \in \,]0,\alpha[$ et $w_n \in \,]\alpha,1[$.

Nous pouvons vérifier que $v_1 = u_2 = \dfrac{7}{16} < \dfrac{1}{2} = v_0$, donc la suite (v_n) décroît ; nous savons que (w_n) varie en sens contraire, donc (w_n) croît ; comme $v_0 < \alpha$ et $w_0 > \alpha$, il en résulte qu'aucune de ces deux suites ne peut converger vers α, d'où, *a fortiori* (u_n) ne peut converger vers α, donc (u_n) diverge (puisque α est la seule limite possible de (u_n)).

Pour être plus précis, nous pouvons dire que chacune des suites (v_n) et (w_n), respectivement décroissante minorée et croissante majorée, converge et que les limites sont des points fixes de $g : x \mapsto -x^4 + 2x^2$. Or,

$$g(x) - x = -x^4 + 2x^2 - x = -x(x-1)(x^2+x-1) ,$$

dont les racines sont 0, 1, $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, cette dernière valeur, en dehors de l'intervalle $[0,1]$, étant à exclure. On déduit enfin facilement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 1$.



---

9. Soit une suite (u_n) telle que $u_0 > 0$, $u_1 > 0$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \dfrac{1+u_n}{1+u_{n+1}}\, u_{n+1}$.

a. Montrer qu'il existe un réel strictement positif a tel que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \dfrac{a}{1+u_n}$.

b. En étudiant les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), montrer la convergence de la suite (u_n).

- -

a. On montre d'abord par une récurrence (immédiate) que u_n est défini et $u_n > 0$ pour tout n. Ensuite, on note que $(1+u_{n+1})\, u_{n+2} = (1+u_n)\, u_{n+1}$, autrement dit la suite de terme général $v_n = (1+u_n)\, u_{n+1}$ est constante. En posant $a = (1+u_0)\, u_1$, on a bien $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{a}{1+u_n}$.

b. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{a}{1+x}$, elle est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $f(\mathbb{R}_+) =]0, a]$ et l'intervalle $[0, a]$ est stable par f puisque $f\big([0,a]\big) = \big[f(a), f(0)\big] = \left[\dfrac{a}{1+a}, a\right] \subset [0, a]$. On a donc $u_n \in [0, a]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$, les suites (x_n) et (y_n) sont monotones de sens contraires (cela résulte de la décroissance de f, *cf.* TD), et elles sont bornées donc toutes deux convergentes. En posant $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, de la relation $x_{n+1} = (f \circ f)(x_n)$ avec $f \circ f$ continue, on déduit que l est un point fixe de $f \circ f$. Or, l'équation $(f \circ f)(x) = x$ admet pour seule solution dans l'intervalle $[0, a]$ le réel $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$ (*calcul laissé à l'improbable lecteur*), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$. On obtient de même $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \alpha$. De $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \alpha$, on déduit enfin que la suite (u_n) converge vers α.

---

10. Soit $a \in \mathbb{C}$, soit $u = (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \quad , \quad u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = a\, u_{n+1} + (1-a)\, u_n \ .$$

Étudier la convergence de cette suite.

- -

On reconnaît une suite définie par une récurrence linéaire d'ordre deux. L'équation caractéristique est $r^2 - ar - 1 + a = 0$, soit $(r-1)(r-a+1) = 0$, d'où la discussion :

- si $a = 2$, on a une racine double $r_0 = 1$, et on déduit l'expression $u_n = (\lambda + \mu\, n)\, 1^n$; avec les conditions initiales, on trouve $u_n = n$, la suite diverge.

- sinon, on trouve $u_n = \dfrac{1}{a-2}\big[(a-1)^n - 1\big]$. La suite géométrique $\big((a-1)^n\big)$ converge (alors vers zéro) si et seulement si $|a-1| < 1$.

Finalement (u_n) converge si et seulement si $|a-1| < 1$, autrement dit **ssi** $0 < a < 2$ (dans le cas a réel, sinon a appartient au disque ouvert de centre 1 et de rayon 1 dans le plan complexe), et dans ce cas $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2-a}$.

---

11. Soit $a > 0$, soit la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k}$.

a. Montrer que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1, et tend vers $+\infty$.

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n)$.

- -

a. Par récurrence forte, u_n est bien défini pour tout n et $u_n > 0$. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n = S_{n-1} + u_n > S_{n-1} > 0$, donc $u_{n+1} = \sqrt{S_n} > \sqrt{S_{n-1}} = u_n$: la suite (u_n) est donc strictement croissante à partir du rang 1. *On ne peut cependant pas comparer u_0 et u_1 sans hypothèse supplémentaire sur a.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \geq \sum_{k=1}^{n} u_k \geq n u_1$ avec $u_1 > 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, puis $u_{n+1} = \sqrt{S_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque. On peut aussi utiliser le fait que $u_{n+1} = \sqrt{u_n + u_n^2}$ pour $n \geq 1$, ce qui nous ramène aux études classiques de suites vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

b. On peut écrire, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} = \frac{u_n}{u_{n+1} + u_n} = \frac{1}{1 + \dfrac{u_{n+1}}{u_n}} \ .$$

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = \dfrac{1}{u_{n+1} + u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Finalement, $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

Suites définies implicitement.

12.a. Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution, notée x_n, dans l'intervalle $I_n = \left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[\quad (n \in \mathbf{Z})$.

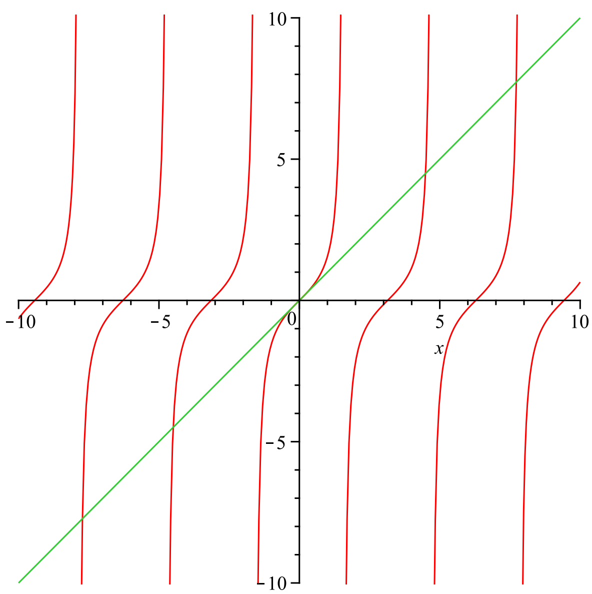
b. Donner le développement asymptotique de x_n à la précision $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. *On pourra utiliser, après l'avoir démontrée, la relation*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\ .$$

c*. Écrire le développement asymptotique de x_n à la précision $o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

- -

a. La fonction $f : x \mapsto \tan x - x$ est continue et strictement croissante (en effet, elle est dérivable et sa dérivée $f'(x) = \tan^2 x$ est positive et s'annule au seul point $n\pi$) sur l'intervalle I_n, donc elle réalise une bijection de cet intervalle vers son image ; une étude des limites aux bornes montre que $f(I_n) = \mathbb{R}$; le réel 0 admet donc un unique antécédent par f dans l'intervalle I_n, d'où l'existence et l'unicité de x_n.



Les x_n sont les abscisses des points d'intersection de la bissectrice (en vert) avec la courbe représentative de la fonction tangente (en rouge).

b. On a $x_n \in I_n$, soit $-\dfrac{\pi}{2} + n\pi < x_n < \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, ce qui donne déjà un équivalent $x_n \sim n\pi$. Par ailleurs, de $x_n \in I_n$, on déduit aussi que

$$\textbf{(*)} \ : \quad x_n = n\pi + \mathrm{Arctan}(\tan x_n) = n\pi + \mathrm{Arctan}\, x_n \qquad \text{puisque} \quad \tan x_n = x_n\ .$$

Petit rappel : on a $\mathrm{Arctan}(\tan x) = x$ *pour tout réel* x *appartenant à l'intervalle*

$I_0 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *; la fonction* tan *étant* π*-périodique, on déduit ensuite que, si un réel* x *appartient à* I_n*, alors* $x - n\pi \in I_0$*, donc*

$$\mathrm{Arctan}(\tan x) = \mathrm{Arctan}\big(\tan(x - n\pi)\big) = x - n\pi\ . \qquad \textit{Fin du petit rappel.}$$

Deuxième petit rappel : la fonction $\varphi : x \mapsto \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{x}$ *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$*, le lecteur vérifiera facilement que* $\varphi'(x) = 0$*, donc* φ *est constante sur* $\mathbb{R}_+^*$*, et* $\varphi(1) = \frac{\pi}{2}$*, on a donc bien*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\ .$$

Remarquons enfin que, par parité, on a $\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ *pour* $x < 0$*. Fin du deuxième petit rappel.*

La relation **(*)** peut s'écrire $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{x_n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = 0$ et que $\mathrm{Arctan}\, x \sim x$ au voisinage de zéro, on a donc $\mathrm{Arctan}\, \frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{n\pi}$. Finalement, on obtient le développement asymptotique de x_n à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$:

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)\ .$$

c. C'est du calcul : on a

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n\pi}\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi\, n^2} + \frac{\pi^2 + 4}{4\pi^3 n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\ .$$

Avec la relation **(*)** et le développement limité $\mathrm{Arctan}\, u = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$ au voisinage de zéro, on obtient

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi\, n^2} - \frac{3\pi^2 + 8}{12\pi^3\, n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\ .$$

---

13. Montrer que, pour tout n entier naturel, l'équation $x\, e^x = \sqrt{n}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$, que l'on notera x_n. Donner un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- -

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\quad x \mapsto x\, e^x$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = (x+1)\, e^x > 0$. Donc f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, elle établit donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même. Le nombre $\sqrt{n}$ admet alors un unique antécédent $x_n = f^{-1}(\sqrt{n})$. On a bien sûr $\lim\limits_{y\to+\infty} f^{-1}(y) = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

On a $x_n e^{x_n} = \sqrt{n}$, donc $\ln x_n + x_n = \frac{1}{2} \ln n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on a $\ln(x_n) = o(x_n)$ par les théorèmes de croissances comparées, il reste donc $x_n \sim \frac{1}{2} \ln n$.

---

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit P_n la fonction polynôme définie par $P_n(x) = x^n + x - 3$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet une unique racine réelle positive, que l'on notera x_n. Montrer que $x_n \in]1, 2[$. Déterminer le signe de $P_{n+1}(x_n)$, en déduire que la suite (x_n) est décroissante. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$. Donner un équivalent simple de $x_n - 1$.

- -

Étudions sur $\mathbb{R}_+$ la fonction polynomiale P_n : sa dérivée $P_n'(x) = nx^{n-1} + 1$ est strictement positive, donc la fonction P_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $P_n(0) = -3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P_n(x) = +\infty$. La fonction P_n établit donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $[-3, +\infty[$, d'où l'existence et l'unicité d'un antécédent x_n du nombre 0. De plus, $P_n(1) = -1 < 0$ et $P_n(2) = 2^n - 1 > 0$, donc $x_n \in]1, 2[$.

Comme $x_n > 1$, on a $x_n^{n+1} > x_n^n$, donc

$$P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 3 > x_n^n + x_n - 3 = P_n(x_n) = 0 = P_{n+1}(x_{n+1}) \ .$$

De l'inégalité $P_{n+1}(x_n) > P_{n+1}(x_{n+1})$ et de la croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction P_{n+1}, on déduit que $x_n > x_{n+1}$: la suite (x_n) est donc strictement décroissante.

La suite (x_n) est décroissante et minorée (par 1), elle est donc convergente. Si on fixe $\varepsilon > 0$, on a

$$P_n(1 + \varepsilon) = (1 + \varepsilon)^n + \varepsilon - 2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \ ,$$

donc il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel $P_n(1 + \varepsilon) \geq 0$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N$, on a alors $P_n(1 + \varepsilon) \geq P_n(x_n)$ donc $1 \leq x_n \leq 1 + \varepsilon$ (car la fonction P_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$). On a ainsi prouvé l'assertion

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad n \geq N \Longrightarrow 1 \leq x_n \leq 1 + \varepsilon \ ,$$

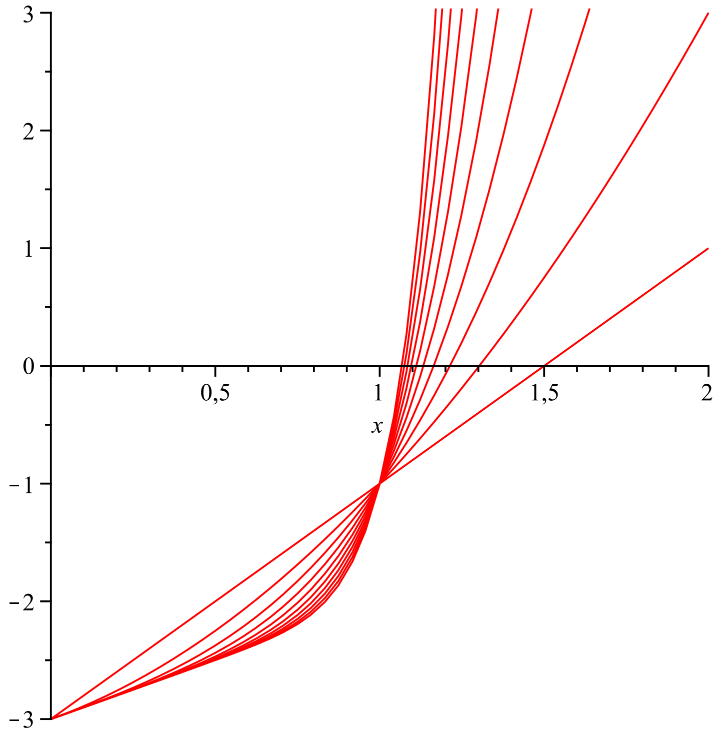
autrement dit $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$.

Variante : On a $P_n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n - 2 + \dfrac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e - 2 > 0$, donc $P_n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ est strictement positif pour n assez grand ($n \geq N$). Pour $n \geq N$, on a donc $1 < x_n < 1 + \dfrac{1}{n}$; le théorème "des gendarmes" permet de conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n^n + x_n - 3 = 0$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$; on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^n = 2$ et, en prenant le logarithme, $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln x_n = \ln 2$, soit $\ln x_n \sim \dfrac{\ln 2}{n}$. Mais d'autre part, $\ln x \underset{x \to 1}{\sim} x - 1$ (*équivalence classique* $\ln(1 + h) \sim h$ *en* 0, *puis translation de la variable* $x = 1 + h$), on a donc montré que $x_n - 1 \sim \dfrac{\ln 2}{n}$, autrement dit on a le développement asymptotique (ou "développement limité à l'ordre un") :

$$x_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \ .$$

Le lecteur pourra se faire une idée du comportement de la suite (x_n) en observant le schéma ci-dessous représentant, sur l'intervalle $[0,2]$, les fonctions polynomiales P_n pour n de 1 à 10. Les nombres x_n sont les abscisses des points d'intersection des courbes rouges avec l'axe Ox.



---

15. Montrer que la relation $n\,u_n^{n+1} - (n+1)\,u_n^n = 1$ définit une unique suite positive $(u_n)_{n\geq 1}$. Déterminer sa limite.

- -

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n$ décroît strictement sur $[0,1]$, et croît strictement sur $[1,+\infty[$ puisqu'elle est dérivable avec $f_n'(x) = n(n+1)(x-1)\,x^{n-1}$. Comme $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, on déduit du théorème de la bijection qu'elle prend la valeur 1 en un unique réel positif u_n, et que l'on a $u_n > 1$.

Pour tout x réel, on observe que

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= (n+1)x^{n+2} - (2n+2)x^{n+1} + (n+1)x^n \\ &= (n+1)\,x^n\,(x-1)^2 \;\geq\; 0\,. \end{aligned}$$

En particulier, $f_n(u_{n+1}) \leq f_{n+1}(u_{n+1}) = 1 = f_n(u_n)$. Comme la fonction f_n est croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$ (dans lequel se trouvent u_n et u_{n+1}), on déduit que $u_{n+1} \leq u_n$: la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée (par 1), elle admet donc une limite l avec $l \geq 1$.

Montrons par l'absurde que $l = 1$. Si ce n'était pas le cas, on aurait $l > 1$. Comme $f_n(u_n) = 1$ pour tout n, on a

$$\frac{1}{n} = \frac{f_n(u_n)}{n} = u_n^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n^n = u_n^n \left(u_n - 1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^n(l-1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\ ,$$

car $u_n^n = e^{n\ \ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $l - 1 > 0$. On a ainsi obtenu une contradiction. On en déduit que $l = 1$.

16.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution, que l'on notera x_n, dans $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

c. Donner un développement asymptotique de x_n avec trois termes non nuls, plus un reste.

- -

a. La fonction $f : x \mapsto x + \ln(x)$ est continue et strictement croissante ($f'(x) = \dfrac{x+1}{x} > 0$) sur $\mathbb{R}_+^*$, elle établit donc une bijection de l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ vers son image. Or, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On a donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. Chaque entier naturel n admet donc un unique antécédent $u_n = f^{-1}(n)$.

b. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = +\infty$.

c. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, par croissances comparées, on a $\ln(x_n) = o(x_n)$. De la relation **(E)**: $x_n + \ln(x_n) = n$, on tire alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, soit $x_n = n\big(1 + o(1)\big)$.

On réinjecte dans **(E)**: $x_n = n - \ln(x_n) = n - \ln(n) - \ln\big(1 + o(1)\big) = n - \ln(n) + o(1)$.

On recommence!

$$x_n = n - \ln\big(n - \ln(n) + o(1)\big) = n - \ln(n) - \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)\ ,$$

soit, en utilisant $\ln(1+u) = u + o(u)$ lorsque $u \to 0$,

$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\ .$$

Autres exercices sur les suites. Ensembles dénombrables.

17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3\ .$$

a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f\left(\dfrac{x}{2} + 3\right) = \dfrac{f(x)}{2} + 3$.

b. En déduire que f' est constante sur $\mathbb{R}$.

c. Expliciter f.

- -

a. C'est simplement la relation $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f$, résultant de l'associativité de la loi de composition des applications Les deux expressions sont $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$.

b. Comme f est supposée dérivable, on dérive la relation ci-dessus, cela donne, après multiplication par 2 :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'\Big(\frac{x}{2}+3\Big) = f'(x)\ .$$

Il serait faux d'en déduire directement que f' est constante ; pour l'instant, on a seulement montré qu'à tout réel x, on peut associer un autre réel $x' = \dfrac{x}{2}+3$ en lequel f' prend la même valeur.

Soit alors x un réel quelconque, définissons une suite (x_n) par récurrence, avec $x_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2}+3$. D'après ce qui précède, on a $f'(x_{n+1}) = f'(x_n)$ pour tout n, d'où $f'(x_n) = f'(x_0) = f'(x)$ pour tout n. Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 6$: la suite (x_n) est arithmético-géométrique, on obtient facilement la relation $x_{n+1} - 6 = \dfrac{1}{2}(x_n - 6)$, d'où sa limite et, comme la fonction f' est continue (f est $\mathcal{C}^1$), on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(x_n) = f'(6)$. La suite $\big(f'(x_n)\big)$ étant constante, cela signifie que $f'(x_n) = f'(6)$ pour tout n, en particulier pour $n = 0$, donc $f'(x) = f'(6)$, et ceci quel que soit le réel x, donc f' est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

c. Comme f' est constante, f est une fonction affine, on recherche f sous la forme $x \mapsto a\,x+b$. Un calcul laissé à l'estimable lecteur donne deux solutions :

$$f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{2}} + 6 - 3\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad f : x \mapsto -\frac{x}{\sqrt{2}} + 6 + 3\sqrt{2}\ .$$

---

18. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(1) \neq 0$. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\, f(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, puis que $I_n \sim \dfrac{f(1)}{n}$.

- -

• La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée : $|f(x)| \leq M$. On en déduit la majoration

$$|I_n| = \left|\int_0^1 x^n\, f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 x^n\,|f(x)|\,\mathrm{d}x \leq M \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{M}{n+1}\ ,$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

• Comme f est supposée de classe $\mathcal{C}^1$, cela doit suggérer l'idée d'une intégration par parties. On obtient en effet

$$I_n = \frac{1}{n+1}\left[f(1) - \int_0^1 x^{n+1}\, f'(x)\,\mathrm{d}x\right] = \frac{f(1)}{n+1} + o\Big(\frac{1}{n+1}\Big)\ ,$$

puisque, avec les mêmes arguments que ci-dessus, la fonction f' étant aussi bornée sur $[0,1]$, on montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\, f'(x)\,\mathrm{d}x = 0$. En conséquence, $I_n \sim \dfrac{f(1)}{n+1} \sim \dfrac{f(1)}{n}$.

19. Théorème de Cesàro

a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $v_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k$ (v_n est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite u). On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=l\in\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}v_n=l$.

b. Soit (u_n) une suite réelle telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=l$ ($l\in\mathbb{R}$). Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=l$.

c. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=l$ avec $l\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}=l$.

d. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

- -

a. Nous devons prouver l'assertion

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N\in\mathbb{N}\quad\forall n\in\mathbb{N}\qquad n\geq N\Longrightarrow|v_n-l|\leq\varepsilon\ .$$

Notons d'abord que $v_n-l=\dfrac{(u_1-l)+(u_2-l)+\ldots+(u_n-l)}{n}$.

Soit donc $\varepsilon>0$. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=l$, il existe un entier N tel que $|u_k-l|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout k tel que $k\geq N$. Si n est un entier plus grand que N, on peut écrire

$$v_n-l=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}(u_k-l)+\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}(u_k-l)\ . \qquad \textbf{(*)}$$

On majore directement le second terme de **(*)** en utilisant l'inégalité triangulaire : puisque $|u_k-l|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $k\geq N$, on a donc

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}(u_k-l)\right|\leq\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k-l|\leq\frac{1}{n}(n-N)\frac{\varepsilon}{2}\leq\frac{\varepsilon}{2}\ .$$

L'entier N ayant été fixé, la quantité $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(u_k-l)$ est alors une constante (indépendante de la "variable" n) ; le premier terme $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}(u_k-l)$ de **(*)** tend donc vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$ et il est donc en valeur absolue inférieur à $\dfrac{\varepsilon}{2}$ lorsque n est supérieur à un certain entier naturel N'. Pour $n\geq\max\{N,N'\}$, on a alors $|v_n-l|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

b. Nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n-u_{n-1})=l$, d'où, en posant

$$v_n=\frac{(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\cdots+(u_n-u_{n-1})}{n}\ ,$$

nous savons que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ d'après la question **a**.

Or, par télescopage, $v_n = \dfrac{u_n}{n} - \dfrac{u_0}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_0}{n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = l$.

c. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \big(\ln x_{n+1} - \ln x_n\big) = \ln l$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ln x_n = \ln l$ d'après la question **b**. En prenant enfin l'exponentielle (fonction continue), on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

d. Utilisons la question **c**.

• Avec $x_n = \dbinom{2n}{n}$, nous avons

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dbinom{2n+2}{n+1}}{\dbinom{2n}{n}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{2\,(2n+1)}{n+1} \text{ qui tend vers } 4\ ,$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}} = 4$.

• Avec $x_n = \dfrac{n^n}{n!}$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ tend vers e, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = e$.

20*. Soit (u_n) une suite réelle bornée. Pour tout n entier naturel, on pose

$$v_n = \inf_{k\geq n} u_k \qquad \text{et} \qquad w_n = \sup_{k\geq n} u_k\ .$$

a. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont toutes deux convergentes, et comparer leurs limites.

b. Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

- -

a. Supposons $\forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq u_n \leq M$. Pour tout n, soit l'ensemble $U_n = \{u_k\ ;\ k \geq n\}$. Ces ensembles sont des parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées car incluses dans $[m, M]$, d'où l'existence de $v_n = \inf(U_n)$ et $w_n = \sup(U_n)$. Par ailleurs, on a $U_{n+1} \subset U_n$, d'où $v_{n+1} \geq v_n$ et $w_{n+1} \leq w_n$, donc (v_n) est croissante et (w_n) est décroissante. Les deux suites étant bornées puisqu'à valeurs dans $[m, M]$, elles sont toutes deux convergentes. Enfin, on a, pour tout n, l'inégalité évidente $v_n \leq w_n$. Par passage à la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

b. Comme on sait que (v_n) croît et que (w_n) décroît, ces deux suites sont adjacentes si et seulement si elles ont la même limite.

• Si c'est le cas, en posant $l = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$, alors on a pour tout n, $v_n \leq u_n \leq w_n$ (puisque $u_n \in U_n$), et le théorème d'encadrement permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

• Inversement, si (u_n) converge, en nommant l sa limite, si on se donne un réel strictement positif ε, il existe un rang N tel que $U_N \subset [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ (*c'est la traduction exacte de la notion de limite*), alors pour tout $n \geq N$, on a $U_n \subset U_N \subset [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, ce qui entraîne

$l-\varepsilon \leq v_n \leq u_n \leq w_n \leq l+\varepsilon$, donc $|v_n - l| \leq \varepsilon$ et $|w_n - l| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$. On a ainsi prouvé que les suites (v_n) et (w_n) ont toutes deux pour limite l, et donc sont adjacentes d'après la remarque faite au début de cette question.

---

21. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs. Pour tout n, on pose $y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}$.

a. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ lorsque (x_n) est une suite constante de valeur $a > 0$.

b. Même question lorsque $x_n = a\, b^{2^n}$ avec $a > 0$, $b > 0$.

c*. Montrer que (y_n) converge si et seulement s'il existe un réel positif M tel que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \leq M^{2^n}$.

- -

Notons d'abord que, dans tous les cas, la suite (y_n) est croissante ; elle est donc convergente si et seulement si elle est majorée.

a. Si $x_n = a$ pour tout n, on note la relation $y_{n+1} = \sqrt{a + y_n} = f(y_n)$ avec $f : x \mapsto \sqrt{a+x}$. Si (y_n) converge vers l, on a alors $\sqrt{a+l} = l$, ce qui, avec la condition $l \geq 0$, entraîne $l = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. On vérifie que $y_1 = \sqrt{a} < l$. Une rapide étude de la fonction f montre qu'elle laisse stable l'intervalle $[0, l]$, on a donc $y_n \leq l$ pour tout n. La suite (y_n) étant majorée, on déduit qu'elle converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = l = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\ .$$

b. Si $x_n = a\, b^{2^n}$, notons (y'_n) la suite étudiée dans la question **a.**, c'est-à-dire lorsque la suite (x_n) est constante de valeur a. On observe facilement que $y_n = b\, y'_n$ pour tout n. Comme (y'_n) converge, il en est de même de (y_n), et

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = b \cdot \lim_{n\to+\infty} y'_n = b\, \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\ .$$

c. • Il est clair que, si (x_n) et (x'_n) sont deux suites de réels positifs telles que $x_n \leq x'_n$ pour tout n, alors on a aussi $y_n \leq y'_n$ pour tout n, avec des notations que le lecteur comprendra. Si $x_n \leq M^{2^n}$ pour tout n, en posant $x'_n = M^{2^n}$, on a alors $y_n \leq y'_n$ où (y'_n) est la suite étudiée dans la question **b.** avec $a = 1$ et $b = M$. Comme la suite (y'_n) est majorée, il en est a fortiori de même pour la suite (y_n), et cette suite est alors convergente d'après la remarque faite en préambule.

• On a l'inégalité "triviale" $y_n \geq \sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{x_n}}} = x_n^{2^{-n}}$.

Si la suite (y_n) converge, soit l sa limite. Comme (y_n) est croissante, on a $y_n \leq l$ pour tout n, donc $x_n^{2^{-n}} \leq l$, puis $x_n \leq l^{2^n}$, ce qu'il fallait prouver.

22*. Une suite réelle (a_n) est dite **convexe** si on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leq \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$. Elle est dite **concave** si la suite $(-a_n)$ est convexe.

a. Par quelle propriété simple de la suite (d_n), de terme général $d_n = a_{n+1} - a_n$, se traduit la convexité d'une suite réelle (a_n) ? Quelles sont les suites réelles qui sont à la fois convexes et concaves ?

b. Soit (a_n) une suite convexe majorée. Montrer qu'elle est décroissante.

c. Dans cette question, (a_n) est une suite convexe bornée et on pose $d_n = a_{n+1} - a_n$ pour tout n.

i. Montrer que la suite (a_n) est convergente.

ii. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geq 2p$. Prouver les inégalités $2(a_n - a_p) \leq n d_{n-1} \leq 0$.

iii. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} n d_n = 0$.

- -

a. La suite (a_n) est convexe si et seulement si, pour tout n, on a $a_{n+1} - a_n \leq a_{n+2} - a_{n+1}$, soit $d_n \leq d_{n+1}$. La convexité de la suite (a_n) équivaut donc à la croissance de la suite (d_n) et, bien évidemment, la concavité de (a_n) équivaut à la décroissance de la suite (d_n).

La suite (a_n) est convexe et concave à la fois si et seulement si la suite (d_n) est à la fois croissante et décroissante, donc constante. Ceci caractérise les suites arithmétiques.

b. Raisonnons par l'absurde: si (a_n) n'était pas décroissante, il existerait au moins un entier naturel N tel que $a_{N+1} > a_N$. Posons $\delta = a_{N+1} - a_N = d_N$, alors $\delta > 0$, et la croissance de la suite (d_n), prouvée en **a.**, nous apprend que $d_n \geq \delta$ pour tout $n \geq N$, soit $a_{n+1} \geq a_n + \delta$ pour tout $n \geq N$. Une récurrence immédiate donne alors $a_n \geq a_N + (n - N)\delta$ pour tout $n \geq N$, ce qui entraîne $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse que (a_n) est majorée.

c. i. La suite (a_n) est décroissante d'après **b.**, et elle est aussi minorée, elle est donc convergente.

ii. Comme la suite (a_n) est décroissante, la suite (d_n) est à valeurs négatives, ce qui donne déjà l'inégalité $n d_{n-1} \leq 0$.

Ensuite, la suite (d_n) étant croissante, écrivons

$$2(a_n - a_p) = 2 \sum_{k=p}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = 2 \sum_{k=p}^{n-1} d_k \leq 2 \sum_{k=p}^{n-1} d_{n-1} = 2(n-p)\, d_{n-1} \leq n\, d_{n-1}\ ,$$

la dernière inégalité résultant du fait que $2(n-p) \geq n$ et $d_{n-1} \leq 0$.

iii. Pour tout $n \geq 2$, posons $p_n = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$, alors $p_n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 2p_n$. Il résulte de **ii.** que l'on a, pour tout $n \geq 2$, l'encadrement $2\,(a_n - a_{p_n}) \leq n\, d_{n-1} \leq 0$. Comme la suite (a_n) admet une limite A et que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = +\infty$ car $p_n \geq \dfrac{n}{2} - 1$, la suite (a_{p_n}) converge aussi vers A, et $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - a_{p_n}) = A - A = 0$. Par encadrement, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} n d_{n-1} = 0$. Par décalage d'indice, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) d_n = 0$. Enfin, $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = 0$, donc par différence, $\lim\limits_{n \to +\infty} n d_n = 0$.

23.a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

b. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ est infini non dénombrable. *On pourra supposer qu'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et chercher une contradiction en considérant l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \varphi(n)\}$.*

- -

a. L'application $f : \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ définie par $f(A) = \sum_{k\in A} 2^k$ est une bijection. Cela résulte de l'existence (surjectivité) et de l'unicité (injectivité) de l'écriture binaire d'un entier naturel.

b. Cet ensemble est infini puisqu'il contient $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$. Supposons qu'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Alors $A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \notin \varphi(n)\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, il existe donc un (unique) entier m tel que $A = \varphi(m)$. Cet entier m appartient-il à A ? *Je laisse le lecteur conclure que l'hypothèse de départ est absurde!*

Exercices avec Python.

24. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1$.

1. Écrire une fonction `courbe(n)` permettant de représenter f_n sur $[0,1]$.

2. Montrer que la fonction f_n admet un unique zéro, que l'on notera u_n, dans l'intervalle $[0,1]$.

3. Écrire une fonction qui prend en argument un entier n et qui retourne une valeur approchée de u_n à 10^{-5} près.

4. Conjecturer le comportement de la suite (u_n), puis démontrer votre conjecture.

- -

1. *cf.* script.

2. La fonction f_n est continue et strictement croissante (évident) donc établit une bijection de $[0,1]$ vers $\big[f(0), f(1)\big] = [-1, n-1]$. Comme 0 appartient à l'intervalle image, il a donc un unique antécédent u_n dans $[0,1]$.

3. *cf.* script.

4. 0n dirait bien que (u_n) décroît et tend vers $\frac{1}{2}$. Prouvons-le, pardi!

- On note que, pour tout $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$. En particulier,

$$f_n(u_{n+1}) \le f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 = f_n(u_n)\ .$$

Comme la fonction f_n est croissante sur $[0,1]$, on déduit $u_{n+1} \le u_n$, la suite (u_n) est décroissante.

- Notons que, pour $x \neq 1$, on a aussi $f_n(x) = x\,\dfrac{x^n - 1}{x-1} - 1 = \dfrac{x^{n+1} - 2x + 1}{x-1}$. Pour tout $n \ge 2$, on a donc **(R):** $u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0$. Par ailleurs, pour $n \ge 2$, on a $0 \le u_n \le u_2 < 1$, donc $0 \le u_n^{n+1} \le u_2^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n^{n+1} = 0$, la relation **(R)** donne $\lim_{n\to+\infty}(-2u_n + 1) = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

---

25. Soit $(u_n)_{n\ge1}$ une suite réelle. Pour $n \ge 1$, et $(a,b) \in [0,1]^2$ avec $a < b$, on pose

$$c_n(a,b) = \mathrm{Card}\Big(\big\{k \in [\![1,n]\!] \;\big|\; u_k - \lfloor u_k \rfloor \in [a,b]\big\}\Big)\ .$$

C'est donc le nombre de termes de la suite u (parmi les n premiers) dont la "partie fractionnaire" est comprise entre a et b. La suite u est dite **équirépartie modulo 1** si, pour tout $(a, b) \in [0,1]^2$ avec $a < b$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\, c_n(a, b) = b - a$.

a. Écrire une fonction Python d'arguments u, n, a, b renvoyant $c_n(a, b)$.

b. La tester avec $u_n = \sqrt{n}$, avec $u_n = \ln(n)$, avec $u_n = \alpha^n$ où $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $(a, b) = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$. Que conjecturez-vous ?

c. Soit u définie par $u_n = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

(i). Quelles sont les suites réelles w telles que $w_{n+2} = w_n + w_{n+1}$ pour tout n ?

(ii). Trouver une suite v de limite nulle telle que $u + v$ soit à valeurs entières.

(iii). En déduire que u n'est pas équirépartie modulo 1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n(a, b)}{n}$ pour tout couple $(a, b) \in [0,1]^2$ avec $a < b$. Tester expérimentalement.