CORRIGÉ du PROBLÈME du POLY sur les SUITES
PSI2 2024-2025

1. Les fonctions $|f'|$ et $|f''|$ sont **continues** sur le **segment** S, elles sont donc bornées et atteignent leurs bornes ("**théorème des bornes atteintes**").

2. Étude de la méthode des rectangles avec point initial

a. C'est simplement une inégalité d'accroissements finis: la fonction f est continue sur le segment $[a_k, t]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a_k, t[$, avec $|f'| \leq M_1$ sur cet intervalle ouvert, on a donc l'inégalité demandée.

b. Le nombre $\dfrac{b-a}{n}$ étant le pas de la subdivision, c'est-à-dire la longueur de l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\,f(a_k)\right| &= \left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} \big(f(t)-f(a_k)\big)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} \big|f(t)-f(a_k)\big|\,\mathrm{d}t \\ &\leq M_1 \int_{a_k}^{a_{k+1}} (t-a_k)\,\mathrm{d}t \;=\; M_1\,\frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{2} \;=\; M_1\,\frac{(b-a)^2}{2n^2}\ .\end{aligned}$$

c. On utilise la relation de Chasles puis l'inégalité triangulaire:

$$\big|I - R_n(f)\big| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\,f(a_k)\right)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\,f(a_k)\right|,$$

puis en utilisant **b.**:

$$\big|I - R_n(f)\big| \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_1\,\frac{(b-a)^2}{2n^2} = M_1\,\frac{(b-a)^2}{2n}\ .$$

3. Étude de la méthode des rectangles avec point médian

a.i. Comme g est continue sur $[c-\alpha, c+\alpha]$, par le **théorème fondamental de l'analyse**, elle admet des primitives sur cet intervalle (qui sont alors de classe $\mathcal{C}^3$), soit G l'une d'entre elles. On peut alors écrire

$$\varphi(x) = G(c+x) - G(c-x) - 2x\,g(c)\ .$$

Il est alors immédiat que φ est de classe $\mathcal{C}^3$, donc a fortiori $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\alpha]$, avec

$$\varphi'(x) = G'(c+x) + G'(c-x) - 2\,g(c) = g(c+x) + g(c-x) - 2\,g(c)\ ,$$

puis

$$\varphi''(x) = g'(c+x) - g'(c-x)\ .$$

ii. C'est encore une inégalité d'accroissements finis: la fonction g' est dérivable avec une dérivée bornée (majorée par M en valeur absolue), donc

$$\big|\varphi''(x)\big| = \big|g'(c+x) - g'(c-x)\big| \leq M\,\big((c+x)-(c-x)\big) = 2M\,x\ .$$

iii. Comme $\varphi'(0) = 0$, on peut écrire $\varphi'(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi''(t)\,\mathrm{d}t$, puis majorer:

$$\big|\varphi'(x)\big| = \left|\int_0^x \varphi''(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x \big|\varphi''(t)\big|\,\mathrm{d}t \leq 2M\int_0^x t\,\mathrm{d}t = M\,x^2\ .$$

De la même façon, comme $\varphi(0) = 0$,

$$\left|\varphi(x)\right| = \left|\int_0^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x \left|\varphi'(t)\right|\,\mathrm{d}t \leq M \int_0^x t^2\,\mathrm{d}t = M\,\frac{x^3}{3}\ .$$

b. Fixons $k \in [\![0, n-1]\!]$. En prenant $c = c_k = \dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$, $\alpha = \dfrac{b-a}{2n}$, et $g = f$, on obtient $c - \alpha = a_k$, $c + \alpha = a_{k+1}$, et

$$\left|\varphi(\alpha)\right| = \left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\,f(c_k)\right| \leq M\,\frac{\alpha^3}{3} \leq M_2\,\frac{(b-a)^3}{24\,n^3}\ ,$$

en posant $M = \max\limits_{t\in[c-\alpha,c+\alpha]} \left|f''(t)\right| = \max\limits_{t\in[a_k,a_{k+1}]} \left|f''(t)\right|$, que l'on peut bien sûr majorer par le M_2 de l'énoncé. En reprenant la démarche de la question **2.c.** (relation de Chasles, puis inégalité triangulaire), on obtient bien

$$\left|I - R'_n(f)\right| \leq M_2\,\frac{(b-a)^3}{24\,n^2}\ .$$

4. Étude de la méthode des trapèzes

a. De même qu'en **3.a.**, si on note G une primitive de g sur $[c, c+\alpha]$ (qui est alors de classe $\mathcal{C}^3$), on a

$$\forall x \in [0,\alpha] \qquad \psi(x) = G(c+x) - G(c) - x\,\frac{g(c) + g(c+x)}{2}\ ,$$

donc ψ est de classe $\mathcal{C}^3$ (donc $\mathcal{C}^2$) sur $[0,\alpha]$, avec

$$\psi'(x) = \frac{1}{2}\,\big(g(c+x) - g(c) - x\,g'(c+x)\big)\ ,$$

puis

$$\psi''(x) = -\frac{x}{2}\,g''(c+x) \qquad \text{sur} \quad [0,\alpha]\ .$$

On a alors immédiatement $\left|\psi''(x)\right| \leq M\,\dfrac{x}{2}$, puis comme $\psi'(0) = 0$,

$$\left|\psi'(x)\right| = \left|\int_0^x \psi''(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x \left|\psi''(t)\right|\,\mathrm{d}t \leq \frac{M}{2}\int_0^x t\,\mathrm{d}t = M\,\frac{x^2}{4}\ ,$$

puis, comme $\psi(0) = 0$,

$$\left|\psi(x)\right| = \left|\int_0^x \psi'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x \left|\psi'(t)\right|\,\mathrm{d}t \leq \frac{M}{4}\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t = M\,\frac{x^3}{12}\ .$$

b. Fixons $k \in [\![0, n-1]\!]$. En prenant $c = a_k$, $\alpha = \dfrac{b-a}{n}$ et $g = f$, on obtient $c + \alpha = a_{k+1}$, et

$$\left|\psi(\alpha)\right| = \left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\,\frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}\right| \leq M\,\frac{\alpha^3}{12} \leq M_2\,\frac{(b-a)^3}{12\,n^3}\ .$$

En reprenant de nouveau la démarche de la question **2.c.**, on conclut que

$$\left|I - T_n(f)\right| \leq M_2\,\frac{(b-a)^3}{12\,n^2}\ .$$

5. Comparaison des méthodes

La méthode des rectangles avec point médian et celle des trapèzes ont des performances comparables, puisque l'erreur commise est en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, où n est le nombre de points de subdivision. Cela signifie concrètement qu'en multipliant par 10 le nombre de points de subdivision, on divise en moyenne l'erreur par 100, autrement dit on gagne deux décimales dans la valeur approchée de l'intégrale I.

La méthode des rectangles avec point initial est nettement moins bonne, puisque l'erreur commise est ici de l'ordre de $O\left(\frac{1}{n}\right)$, ce qui signifie qu'en multipliant par 10 le nombre de calculs, on ne gagne qu'une décimale.