DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 1

PSI2 2024-2025 **pour le 26/09/2024**

PROBLÈME 1

1. Erreur dans le calcul approché d'une intégrale par la méthode des trapèzes

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, on pose

$$I = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad T = \frac{b-a}{2}\,\big(f(a)+f(b)\big)\,.$$

a. Montrer qu'il existe une unique fonction affine (i.e. de la forme $x \mapsto \alpha x + \beta$) coïncidant avec f en les points a et b. On notera φ cette fonction affine.

b. Montrer que $T = \displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$ et donner une interprétation graphique si f est positive.

c. Justifier l'existence de deux réels m et M tels que $\forall x \in [a,b] \quad m \leq f''(x) \leq M$.

d. Pour $x \in [a,b]$, on pose $g(x) = f(x) - \varphi(x) + \dfrac{m}{2}\,(x-a)(b-x)$. Calculer $g''(x)$. En déduire que la fonction g est négative sur $[a,b]$.

e. En procédant comme ci-dessus, déterminer le signe, sur $[a,b]$, de la fonction h définie par $h(x) = f(x) - \varphi(x) + \dfrac{M}{2}\,(x-a)(b-x)$.

f. Des questions précédentes, déduire un encadrement de $f(x) - \varphi(x)$ valable sur $[a,b]$, puis démontrer l'encadrement

$$-M\,\frac{(b-a)^3}{12} \leq I - T \leq -m\,\frac{(b-a)^3}{12}\,.$$

2. Étude de deux suites adjacentes

a. Calculer $\displaystyle\int_n^{n+1} \ln x\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b. En utilisant la question **1.f.**, démontrer l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{12(n+1)^2} \leq \left(n+\frac{1}{2}\right)\big[\ln(n+1) - \ln n\big] - 1 \leq \frac{1}{12\,n^2}\,.$$

c. Pour $n \geq 2$, on pose $U_n = \ln\left(\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}\,e^{-n}}{n!}\right)$ et $V_n = U_n + \dfrac{1}{12(n-1)}$. Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes, on notera provisoirement C leur limite commune.

3. Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Calculer I_0 et I_1.

b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c. En intégrant par parties, exprimer I_{n+2} en fonction de I_n et de n. En déduire que, pour tout n entier naturel, on a $I_{2n} = \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}$.

De la même façon, donner une expression de I_{2n+1}.

4. Formule de Wallis et équivalent de Stirling

a. En utilisant $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n)!\,\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$.

b. En déduire que la constante C de la question **2.c.** vaut $-\dfrac{1}{2}\,\ln(2\pi)$.

Donner alors un équivalent de $n!$ *Indications : considérer* $X_n = \exp(U_n)$*, puis* $Y_n = \dfrac{X_{2n}}{X_n^2}$.

PROBLÈME 2

Dans tout ce problème, on note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs, décroissante et tendant vers zéro.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = (-1)^{n-1}\, v_n$ et $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} v_k$.

1.a. Montrer que la série de terme général u_n converge.

Par la suite, on notera $s = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

b. Pour tout n entier naturel, montrer que $r_n = (-1)^n |r_n|$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité $|r_{n-1}| + |r_n| = v_n$.

2. Dans cette question, on suppose de plus que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n + v_{n+2})\ .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on posera alors $V_n = v_n - v_{n+1}$ et $U_n = (-1)^{n-1} V_n$.

a. Justifier la convergence de la série de terme général U_n.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera alors R_n son reste d'ordre n, soit $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} V_k$.

b. Quel est le signe de R_n ?

c. Démontrer la relation $\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad R_n = r_n + r_{n+1}$.

d. En déduire que la suite $\big(|r_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

e. En utilisant la question **1.b.**, montrer que $|r_n| \sim \dfrac{v_n}{2}$, puis donner un équivalent de r_n.

3. Une application. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction strictement positive, décroissante, dérivable, convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, et telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = 0\ .$$

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $c_n \in \,]n, n+1[$ tel que

$$\ln f(n+1) - \ln f(n) = \frac{f'(c_n)}{f(c_n)}$$

b. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1$.

c. On pose $v_n = f(n)$. En justifiant soigneusement que l'on peut appliquer ce qui précède à la série de terme général $u_n = (-1)^{n-1}\, v_n$, donner un équivalent simple de son reste d'ordre n, toujours noté r_n.

d. Soit α un réel strictement positif. Donner un équivalent de $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}$.

PROBLÈME 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on notera J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $L_i(A)$ la somme des éléments de la i-ième ligne de A.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note $C_j(A)$ la somme des éléments de la j-ième colonne de A.

On appelle **matrice pseudo-magique** toute matrice A telle que les $2n$ nombres $L_i(A)$ $(1 \leq i \leq n)$ et $C_j(A)$ $(1 \leq j \leq n)$ aient la même valeur (même somme sur chaque ligne et sur chaque colonne). Dans ce cas, on notera $\delta(A)$ leur valeur commune.

On note enfin E l'ensemble des matrices pseudo-magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les L_i $(1 \leq i \leq n)$ et les C_j $(1 \leq j \leq n)$ sont des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que δ est une forme linéaire sur E.

2. Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter les matrices AJ et JA à l'aide des sommes $L_i(A)$ et $C_j(A)$.
En déduire qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à E si et seulement si $AJ = JA$. Que vaut la matrice AJ (ou JA) dans ce cas ?

3. Montrer que E est stable par produit, et que $\forall (A, B) \in E^2 \quad \delta(AB) = \delta(A)\,\delta(B)$.

4. Soit A une matrice de E. On suppose que A est inversible. Montrer alors que $\delta(A) \neq 0$, que $A^{-1} \in E$ et que $\delta(A^{-1}) = \dfrac{1}{\delta(A)}$.

5. Soit $A \in E$. Montrer que la matrice $M = A - \dfrac{\delta(A)}{n} J$ appartient à E et calculer $\delta(M)$.
En déduire que les sous-espaces vectoriels

$$F = \mathrm{Ker}(\delta) = \{A \in E \mid \delta(A) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(J) = \{\lambda\, J\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

sont supplémentaires dans E.

6. Dans cette question, $n = 3$. On donne une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

Écrire les six équations exprimant que la matrice A appartient au sous-espace $F = \mathrm{Ker}(\delta)$ de la question précédente. De ce système, tirer a, b, c, d, g en fonction de e, f, h, i.
En déduire que A est combinaison linéaire des quatre matrices

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donner les dimensions de F, puis de E, lorsque $n = 3$. Préciser une base de E.

7. Dans cette question, on reprend $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Si r et s sont deux éléments de l'intervalle entier $[\![2, n]\!]$, on note $T_{r,s}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients $t_{i,j}$ sont nuls sauf quatre d'entre eux, à savoir :

$$t_{1,1} = t_{r,s} = 1 \qquad \text{et} \qquad t_{1,s} = t_{r,1} = -1\ .$$

Montrer que la famille $\mathcal{T} = (T_{r,s})_{(r,s) \in [\![2,n]\!]^2}$ constitue une base de l'espace vectoriel F défini à la question **5.** En déduire les dimensions de F et de E.