Structure d'espace vectoriel.

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{ax}$. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *On dit qu'une famille infinie de vecteurs est libre lorsque toute sous-famille finie est libre.*

2. Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}\big([0, \pi], \mathbb{R}\big)$, montrer que

$$F = \left\{f \in E \;\Big|\; f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi)\right\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$$

sont deux sous-espaces supplémentaires.

3. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille libre de vecteurs dans un espace vectoriel E, soit a un vecteur de E n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$. Montrer que la famille $(e_1 + a, \cdots, e_p + a)$ est libre.

Espaces vectoriels de dimension finie.

4. Soit p un entier naturel non nul, soit E l'ensemble des suites complexes p-périodiques, c'est-à-dire des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = u_n$.

a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Préciser sa dimension.

b*. Construire une base de E constituée de suites géométriques.

5. Soit n un entier naturel ($n \geq 2$). Dans $\mathbb{K}[X]$, on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$.

6. Soient F, G, H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension n.

a. On suppose que $\dim(F) + \dim(G) > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

b. On suppose que $\dim(F) + \dim(G) + \dim(H) > 2n$. Montrer que $F \cap G \cap H \neq \{0\}$.

Applications linéaires.

7. Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E.

a. Montrer que p et q ont la même image si et seulement si $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les projecteurs p et q aient la même direction (c'est-à-dire le même noyau).

8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient u et v deux endomorphismes de E tels que

$$u = u \circ v \circ u \qquad \text{et} \qquad v = v \circ u \circ v\ .$$

a. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ sont des projecteurs.

b. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, v$.

c. On suppose E de dimension finie. Comparer les rangs de u, v, $u \circ v$ et $v \circ u$.

9.a. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe un scalaire $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x\, x$. Montrer que f est une homothétie.

b*. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soient f et g deux applications linéaires de E vers F. On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe un scalaire $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x\, g(x)$. Montrer qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda g$.

10. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que $f^3 = \mathrm{id}_E$. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)\ .$$

11. Soient f, g, h des endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que

$$f \circ g = h\ , \quad g \circ h = f \quad \text{et} \quad h \circ f = g\ .$$

a. Montrer que f, g, h ont même noyau et même image.

b. Montrer que $f^5 = f$.

c. En déduire que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

Applications linéaires en dimension finie. Théorème du rang.

12. Noyaux itérés d'un endomorphisme. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit u un endomorphisme de E. Pour tout entier naturel k, on note $n_k = \dim(\mathrm{Ker}\, u^k)$.

a. Montrer que la suite (n_k) est croissante.

b. On pose $p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n_{k+1} = n_k\}$. Justifier l'existence d'un tel entier p.

c. Montrer que $n_k = n_p$ pour tout entier k supérieur à p.

d. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, u^p \oplus \mathrm{Im}\, u^p$.

13. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension trois, soit u un endomorphisme de E tel que

$$u^3 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}\, u = 2\ .$$

a. Montrer que $\mathrm{Im}\, u^2 \subset \mathrm{Ker}\, u$. Qu'en déduit-on pour le rang de u^2 ?

b. Soit $v = u|_{\mathrm{Im}\, u}$ (endomorphisme de $\mathrm{Im}\, u$ induit par u, ou encore restriction de u au sous-espace $\mathrm{Im}\, u$). Déterminer $\mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Ker}\, v$. En déduire que $\mathrm{rg}\, u^2 = 1$.

c. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

14. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme **nilpotent** (il existe un entier naturel k tel que $u^k = 0$).

a. Soit x un vecteur de E. Soit q le plus petit entier naturel tel que $u^q(x) = 0$ (*justifier son existence*). Montrer que la famille $\big(x, u(x), \cdots, u^{q-1}(x)\big)$ est libre. En déduire que $u^n = 0$.

b. On suppose de plus $u^{n-1} \neq 0$ (justifier l'existence de tels endomorphismes). Montrer que l'endomorphisme u n'admet pas de racine carrée (c'est-à-dire il n'existe pas d'endomorphisme f de E tel que $f^2 = u$).

15. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Montrer que f est un projecteur si et seulement si $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(\mathrm{id}_E - f) = n$.

16. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension trois, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f = 0$.

a. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

b. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f est représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

17. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer

$$\big|\operatorname{rg}(f)-\operatorname{rg}(g)\big| \leq \operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f)+\operatorname{rg}(g)\ .$$

18. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie.

a. Montrer que $\operatorname{rg}(g\circ f) \leq \min\big\{\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g)\big\}$.

b. Montrer que $\operatorname{rg}(g\circ f) \geq \operatorname{rg}(f)+\operatorname{rg}(g)-\dim(E)$. *On pourra considérer l'application linéaire* $u = g\big|_{\operatorname{Im}(f)}$.

c. Soient $f_1, \cdots, f_m$ des endomorphismes de E. Montrer que

$$\dim\big(\operatorname{Ker}(f_1\circ\cdots\circ f_m)\big) \leq \sum_{k=1}^{m} \dim\big(\operatorname{Ker} f_k\big)\ .$$

19. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit V un sous-espace vectoriel de E. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F s'annulant sur V.

a. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

b*. Trouver la dimension de $\mathcal{A}$.

20. Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

a. Montrer que $\operatorname{rg}(g\circ f) = \operatorname{rg}(g) \iff E = \operatorname{Im}(f)+\operatorname{Ker}(g)$.

b. Montrer que $\operatorname{rg}(g\circ f) = \operatorname{rg}(f) \iff \operatorname{Im}(f)\ \cap\ \operatorname{Ker}(g) = \{0\}$.

Calcul matriciel.

21. Théorème d'Hadamard. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **à diagonale strictement dominante**, c'est-à-dire telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\ .$$

Supposons qu'il existe un vecteur **non nul** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$, soit $s \in [\![1,n]\!]$ un indice tel que $|x_s| = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$. En considérant la s-ième coordonnée du vecteur AX, obtenir une contradiction. En déduire que la matrice A est inversible.

22. On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Montrer que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et que cet ensemble est stable par le produit matriciel. Montrer que, si une matrice A de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est inversible, alors son inverse A^{-1} appartient aussi à $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

23. Inverser les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & & & (1) \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 2 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

24. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $A = X^4 - 1$, $B = X^4 - X$. On considère l'application φ de E dans E qui, à tout polynôme P, associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.

a. Montrer que φ est un endomorphisme de E.

b. Écrire la matrice de φ relativement à la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

c. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$.

d. Montrer que $\operatorname{Im}\varphi = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.

25. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A + A^{-1} = I_n$. Calculer $A^k + A^{-k}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

26. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $I_n + A$ soit inversible. On pose $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

a. Montrer que $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$.

b. Montrer que $I_n + B$ est inversible et exprimer A en fonction de B.

Sommes de sous-espaces vectoriels.

27. Soit E un espace vectoriel, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F, soit G' un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. Démontrer la relation
$$F + G = (F \cap G) \oplus F' \oplus G' .$$

28. Soient $E_1, \cdots, E_m$ et $F_1, \cdots, F_m$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} E_i = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ et que $E_i \subset F_i$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. Montrer que $E_i = F_i$ pour tout i.

29. Soient $F_1, \cdots, F_m$ des sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} F_i = E$. Montrer qu'il existe des sous-espaces $G_1, \cdots, G_m$ de E tels que
$$\bigoplus_{i=1}^{m} G_i = E \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, m]\!] \quad G_i \subset F_i .$$

30. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient $p_1, \cdots, p_m$ des endomorphismes de E vérifiant les relations
$$p_i \circ p_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i = \mathrm{id}_E .$$
Montrer que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i$. Interpréter géométriquement les p_i.

31. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (avec E de dimension finie) nilpotent, soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.

a. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, il existe un sous-espace vectoriel F_k de E tel que $\operatorname{Ker}(u^k) = \operatorname{Ker}(u^{k-1}) \oplus F_k$.

b. Prouver que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

c. Observer que la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe ci-dessus est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls.

Sous-espaces stables.

32. Soit p un projecteur dans un espace vectoriel E, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f et p commutent si et seulement si $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont stables par f.

33*. Chercher tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ stables par l'opérateur de dérivation $D : P \mapsto P'$.

34*. Chercher tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ stables par l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto XP$.

Matrices par blocs.

35. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $M = \begin{pmatrix} B & A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Déterminer le rang de M en fonction de A et B. Calculer M^{-1} lorsque M est inversible.

36. Soient $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de M en fonction de celui de D.

37. Soient A, B, C, D des matrices carrées d'ordre n.

a. Soit $E = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(E) = \mathrm{rg}(A) \iff \exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad B = AU\ .$$

b. Soit $F = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(F) = \mathrm{rg}(A) \iff \exists V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad C = VA\ .$$

c. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) \iff \exists (U,V) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)^2 \quad M = \begin{pmatrix} A & AU \\ VA & VAU \end{pmatrix}\ .$$

d. On suppose A inversible. Montrer que

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = n \iff D = CA^{-1}B\ .$$

Trace.

38. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice donnée. On considère l'application $\varphi_A : M \mapsto M + \mathrm{tr}(M) \cdot A$.

a. Montrer que φ_A est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. À quelle condition sur la matrice A l'endomorphisme φ_A est-il un automorphisme ? Préciser alors la bijection réciproque φ_A^{-1}.

c. Dans le cas où φ_A n'est pas bijectif, préciser $\mathrm{Ker}\,\varphi_A$ et $\mathrm{Im}\,\varphi_A$.

39. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On considère des projecteurs $p_1, \cdots, p_k$ de E et on suppose que $p = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i$ est aussi un projecteur. Montrer que $\mathrm{Im}\,p = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Im}\,p_i$ (*utiliser la trace*). En déduire que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$.

40. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

a. Montrer qu'il existe des matrices-colonnes $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = U\,V^\top$.

b. En déduire que $A^2 = \mathrm{tr}(A)\,A$.

c. On suppose que $\mathrm{tr}(A) \neq -1$. Montrer que $I_n + A$ est inversible et exprimer $(I_n + A)^{-1}$ comme combinaison linéaire de I_n et de A.

41. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on suppose qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^q = I_n$. Soit alors $B = \dfrac{1}{q} \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} A^k$.

a. Calculer AB, puis B^2.

b. Montrer l'égalité $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(A - I_n)$.

c. En déduire l'égalité $\dim\big(\mathrm{Ker}(A - I_n)\big) = \dfrac{1}{q} \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{tr}(A^k)$.

Matrices semblables.

42.a. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit u un endomorphisme de E commutant avec tous les automorphismes de E :

$$\forall s \in \mathrm{GL}(E) \qquad s \circ u = u \circ s\ .$$

En utilisant des symétries vectorielles, montrer que, pour tout vecteur x de E, les vecteurs x et $u(x)$ sont colinéaires. En déduire que u est une homothétie.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que la seule matrice semblable à A soit la matrice A elle-même (on a $P^{-1}AP = A$ pour toute matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$). Montrer que A est une **matrice scalaire** ($A = \lambda I_n$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$).

43. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_4$. Montrer que M est semblable à $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Formes linéaires et hyperplans.

44. Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit F un sous-espace de dimension p avec $p < n$. Montrer que l'on peut écrire F comme une intersection de $n-p$ hyperplans de E. Est-il possible d'écrire F comme une intersection de k hyperplans de E avec $k < n-p$?

45. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $\mathrm{tr}(AE_{i,j})$, où $E_{i,j}$ est une matrice élémentaire. Montrer que toute forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de la forme $\tau_A : M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$, où A est une matrice fixée. *On montrera pour cela que l'application $A \mapsto \tau_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur* $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big)$.

46. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient $n+1$ réels distincts a_0, a_1, $\cdots$, a_n.

a. On fixe $i \in [\![0, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $L_i(a_i) = 1$ et $L_i(a_j) = 0$ pour tout $j \neq i$. Expliciter ce polynôme L_i sous forme factorisée. *On aura ainsi $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$, symbole de Kronecker, pour tout couple (i, j). Ces polynômes L_i sont les polynômes d'interpolation de Lagrange.*

b. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n, on ait la relation

$$\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, P(a_i)\ .$$

On pourra considérer les formes linéaires φ_i sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ définies par $\varphi_i(P) = P(a_i)$, ainsi φ_i est la "forme d'évaluation au point a_i". On montrera que ces formes linéaires φ_i $(0 \leq i \leq n)$ constituent une base de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E.

c. Exprimer les λ_i sous forme d'intégrale en utilisant les polynômes L_i. Expliciter les polynômes L_i et les coefficients λ_i dans le cas $n = 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = 1$.

Polynômes d'endomorphismes et de matrices.

47. Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale. Quels sont ses polynômes annulateurs ? Parmi ses polynômes annulateurs non nuls, préciser celui qui est unitaire de degré minimal.

48. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une relation de dépendance linéaire entre les matrices I_3, A et A^2. En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

49. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^n pour n entier naturel.

b. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Donner une expression simple de la matrice $P(A)$.

c. Quels sont les polynômes annulateurs de la matrice A ?

50. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exprimer simplement $P(aI_n + J)$, pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. *On pourra utiliser la formule de Taylor polynomiale.*

51. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $(x_0, u(x_0), \cdots, u^{n-1}(x_0))$ soit libre. Montrer que les endomorphismes commutant avec u sont exactement les polynômes en u.

52*. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on suppose qu'il admet un polynôme annulateur $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul. Montrer que u est injectif si et seulement s'il est surjectif.

Exercices avec Python.

53. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La **centro-transposée** de A est la matrice $\widehat{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de coefficients $\widehat{a}_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}$. On note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $(m_{i,j})$, avec $m_{i,j} = \delta_{j,n+1-i}$ (symbole de Kronecker).

a. Écrire une fonction `J(n)` retournant la matrice J_n.

b. Écrire une fonction `randmatrix(n,p)` retournant une matrice pseudo-aléatoire de taille (n,p), à coefficients entiers dans $[\![0,100]\!]$. Utiliser cette fonction pour conjecturer le lien entre J_n et la centro-transposition $A \mapsto \widehat{A}$. Justifier mathématiquement le résultat conjecturé.

c. Écrire une fonction `centro(A)` retournant la centro-transposée de la matrice A.

d. Montrer les relations $\widehat{AB} = \widehat{A}\,\widehat{B}$, $\widehat{A^{-1}} = (\widehat{A})^{-1}$ si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\widehat{A^\top} = (\widehat{A})^\top$.

e. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{C}^+ = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \widehat{A} = A\}$ et $\mathcal{C}^- = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \widehat{A} = -A\}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et écrire une fonction `decomp(A)` qui retourne les composantes de A dans la décomposition $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{C}^+ \oplus \mathcal{C}^-$.

54. Pour $n \geq 2$, on considère la matrice $M(n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée “en serpent” par les entiers de 1 à n^2, ainsi $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$.

a. Écrire une fonction `f(n,i,j)` retournant le coefficient d'indices (i,j) de la matrice $M(n)$.

b. Écrire une fonction `M(n)` retournant la matrice $M(n)$.

c. Avec Python, afficher le rang de $M(n)$ pour $n \in [\![2,10]\!]$. Faire une conjecture, et la démontrer.

d. Afficher les valeurs de $\dfrac{\mathrm{tr}\big(M(n)\big)}{n^3}$ pour n de 2 à 100. Commenter.

e. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, déterminer $\min\limits_{1\leq j\leq n} \big(M(n)\big)_{i,j}$ et $\max\limits_{1\leq j\leq n} \big(M(n)\big)_{i,j}$. En déduire un équivalent de $\mathrm{tr}\big(M(n)\big)$.
