DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 1

PSI2 2024-2025 **Durée : 4 heures** **14/09/2024**

EXERCICE (QUESTIONS PROCHES du COURS)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non trivial (c'est- a-dire non vide et non réduit à un point). Soit $f : I \to I$ une application continue (l'intervalle I est donc **stable** par l'application f). Soit (u_n) une suite telle que $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Dans cette question, on suppose que, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \geq x$. Que peut-on dire alors de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.

2. Dans cette question, on suppose la fonction f croissante sur I. Montrer que la suite (u_n) est monotone.

3. Dans cette question, on suppose la fonction f décroissante sur I. Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont monotones de sens contraires.

PROBLÈME

PARTIE I. Vitesse de convergence d'une suite réelle.

Dans cette partie, on utilisera les notations suivantes:

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'espace vectoriel des suites définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelles ;
- on rappelle qu'une suite (u_n) est **stationnaire** si $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \qquad u_n = u_{n_0}$.
- E désigne le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergentes, telles que
$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq N \qquad u_k \neq \lim_{n\to+\infty} u_n \ ;$$
- à toute suite $u = (u_n)$ appartenant à E et de limite égale à l, on associe la suite $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang par
$$u_n^c = \left| \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} \right| \ ;$$
- E^c désigne l'ensemble des éléments (u_n) de E telles que $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente ;
- soit (u_n) une suite appartenant à E^c et soit $l^c = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n^c$; on dit que la **vitesse de convergence** de la suite (u_n) est:
  - **lente** si $l^c = 1$,
  - **géométrique de rapport** l^c si $l^c \in]0, 1[$,
  - **rapide** si $l^c = 0$;
- soit (u_n) une suite appartenant à E, de limite l, et soit r un réel strictement supérieur à 1 ; on dit que **la vitesse de convergence** de la suite (u_n) vers l est **d'ordre** r si la suite (w_n) définie à partir d'un certain rang par $w_n = \dfrac{u_{n+1} - l}{|u_n - l|^r}$ est bornée.

1. Des résultats généraux.

a. Montrer que l'ensemble E^c est non vide.

b. L'ensemble E^c est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

c. Montrer que E^c est strictement inclus dans E.

d. Soit (u_n) une suite appartenant à E^c. Montrer que $l^c \in [0, 1]$.

2. Exemples de calculs de vitesse de convergence.

a. Soit k un entier naturel non nul, soit q un réel appartenant à $]0,1[$. Montrer que les suites $\left(\dfrac{1}{(n+1)^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(n^k q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E^c et préciser leur vitesse de convergence.

b. On considère la suite (v_n) définie par $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^{2^n}$.

i. Montrer que $v_n = e-\dfrac{e}{2^{n+1}}+o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ lorsque n tend vers l'infini.

ii. Montrer que la suite (v_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

c. Soit α un réel strictement supérieur à 1. La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$, notons l sa somme.

On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $S_0=0$ et, pour $n\geq 1$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$.

i. Montrer que $\forall n\geq 1\qquad \dfrac{1}{\alpha-1}\,\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\leq l-S_n\leq \dfrac{1}{\alpha-1}\,\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

ii. En déduire que (S_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

3. Vitesse de convergence d'ordre r d'une suite réelle.

a. Soit (u_n) un élément de E dont la vitesse de convergence est d'ordre r, avec $r>1$. Montrer que la convergence de la suite (u_n) est rapide.

b. i. Montrer que la suite (S_n) définie par $\forall n\in\mathbb{N}\quad S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ appartient à E.

On pose $S=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n$.

ii. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $\dfrac{1}{(n+1)!}\leq S-S_n\leq\dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}$.

iii. En déduire que la convergence de la suite (S_n) est rapide.

iv. Soit $r>1$. Montrer que la convergence de (S_n) vers S n'est pas d'ordre r.

c. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, de longueur strictement positive. Soit f une application définie sur I à valeurs dans I, soit (u_n) une suite telle que $u_0\in I$ et $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=f(u_n)$. On suppose que la suite (u_n) converge vers un élément l de I, et que f est dérivable au point l.

i. Montrer que $f(l)=l$.

ii. On suppose que la suite (u_n) n'est pas stationnaire. Montrer alors qu'elle appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence en fonction de $f'(l)$.

iii. Montrer que, si $\left|f'(l)\right|>1$, alors (u_n) est stationnaire.

iv. Soit r un entier, $r\geq 2$. On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^r$sur I et que la suite (u_n) n'est pas stationnaire. Montrer que la vitesse de convergence de (u_n) est d'ordre r si et seulement si $\forall k\in[\![1,r-1]\!]\quad f^{(k)}(l)=0$.

PARTIE II. Accélération de convergence.

Soit (u_n) une suite appartenant à E, soit l sa limite. On dit qu'une suite réelle (v_n) converge vers l **plus rapidement** que (u_n) si on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n - l}{u_n - l} = 0$.

4. Méthode de Richardson-Romberg.

a. Soit (u_n) une suite appartenant à E, soit l sa limite, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1} - l}{u_n - l} = \lambda$, avec $\lambda \in [-1, 1[$. Pour tout n entier, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1} - \lambda u_n}{1 - \lambda}$. Montrer que (v_n) converge vers l plus rapidement que (u_n).

b. Dans cette question, on suppose plus précisément que la suite (u_n) admet un développement asymptotique de la forme

$$u_n = l + a\,\lambda^n + b\,\mu^n + o(\mu^n)\ ,$$

avec l réel, a et b réels non nuls, λ et μ réels tels que $0 < |\mu| < |\lambda| < 1$.

Montrer que la suite (u_n) converge vers l avec une vitesse géométrique de rapport $|\lambda|$.

Quelle est la vitesse de convergence de la suite (v_n), définie en **a.** ci-dessus, vers l ?

5. Exemple du calcul de π par la méthode d'Archimède

Dans cette partie, on considère la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0, 1] \qquad f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2\big(1 - \sqrt{1 - x^2}\big)}\ .$$

a. Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f, i.e. $f\big([0, 1]\big) \subset [0, 1]$.

b. Soit $x \in [0, 1]$, soit $\theta = \operatorname{Arcsin}(x)$. Montrer que $f(x) = \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

On définit alors une suite (x_n) par la donnée de $x_0 = \dfrac{1}{2}$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{2}\sqrt{2\big(1 - \sqrt{1 - x_n^2}\big)}\ ,$$

puis une suite (u_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 6 \times 2^n\, x_n\ .$$

c. En utilisant **b.** ci-dessus, donner une expression explicite de x_n en fonction de l'entier n.

d. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pi$.

e. En utilisant un développement limité en 0 de la fonction sinus, montrer que la vitesse de convergence de la suite (u_n) est géométrique, préciser de quel rapport.

f. En quoi consiste, sur cet exemple, l'application de la méthode de Richardson-Romberg décrite ci-dessus. Quelle est la vitesse de convergence de la suite "accélérée" (v_n) construite par ce procédé ?

6. Procédé d'accélération d'Aitken

Pour appliquer la méthode d'accélération de convergence de Richardson-Romberg, il est nécessaire de savoir que la vitesse de convergence de la suite (u_n) est géométrique, et de savoir de quel rapport.

Une méthode ne nécessitant pas cette connaissance préalable est celle d'Aitken.

On supposera que $u \in E$, et que $u_{n+1} \neq u_n$ et $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \neq 0$ pour tout n.

Le procédé d'Aitken consiste à introduire une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \lambda_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}} \ ,$$

puis une suite $(w_n)_{n\geq 1}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad w_n = \frac{u_{n+1} - \lambda_n u_n}{1 - \lambda_n} \ .$$

a. Soit q un réel différent de 0 et de 1. Dans cette question, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ pour tout n entier naturel. Déterminer la suite (w_n) associée.

b. Dans cette question, on suppose que (u_n) converge vers un réel l et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} = \lambda$ avec $\lambda \in [-1, 1[$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda$. En déduire que la suite (w_n) converge vers l plus rapidement que la suite (u_n).

c. Montrer que $w_n = u_{n-1} - \dfrac{(u_n - u_{n-1})^2}{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}$.

d. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) admet un développement asymptotique de la forme

$$u_n = l + a\,\lambda^n + O(\mu^n) \ ,$$

avec l réel, a réel non nul, λ et μ réels tels que $0 < |\mu| < |\lambda| < 1$. Montrer que $w_n = l + O(\mu^n)$.