CORRIGÉ du DS de MATHÉMATIQUES numéro 1
PSI2 2024-2025

EXERCICE (QUESTIONS PROCHES du COURS)

1. Tout simplement, $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$, la suite (u_n) est donc croissante si l'on suppose $f(x) \geq x$ pour tout x de I. Attention, dans les exemples pratiques, il faudra préalablement s'assurer d'avoir trouvé un intervalle I **stable** par f.

2. Si f est croissante, alors $u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ est du même signe que $u_{n+1} - u_n$ donc, par récurrence, du même signe que $u_1 - u_0$. La suite (u_n) est donc croissante si $u_1 \geq u_0$, décroissante si $u_1 \leq u_0$.

3. Si f est décroissante, alors la fonction $g = f \circ f$ est croissante. Les suites (v_n) et (w_n) sont à valeurs dans I et vérifient la relation de récurrence $v_{n+1} = g(v_n)$, respectivement $w_{n+1} = g(w_n)$. De la question **2.** ci-dessus, on déduit alors que les deux suites (v_n) et (w_n) sont monotones.

Enfin, $w_{n+1} - w_n = u_{2n+3} - u_{2n+1} = f(u_{2n+2}) - f(u_{2n}) = f(v_{n+1}) - f(v_n)$ est du signe opposé à celui de $v_{n+1} - v_n$ car f est décroissante (donc change le sens des inégalités), donc les deux suites extraites (v_n) et (w_n) ont des sens de variation opposés.

PROBLÈME

I. Vitesse de convergence d'une suite réelle

Cette partie est extraite du sujet Math 2 de Centrale-Supélec, filière PC, 2017

1. Des résultats généraux

a. Soit $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout n entier naturel, alors la suite $u = (u_n)$ est convergente, de limite nulle. Comme elle ne prend pas la valeur 0, elle appartient à l'ensemble E. Ensuite, $u_n^c = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $u \in E^c$, et u est à croissance lente.

b. La suite nulle n'appartient pas à E, donc a fortiori n'appartient pas à E^c, et E^c n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

c. Il suffit d'exhiber une suite appartenant à E mais pas à E^c. Considérons par exemple la suite (u_n) telle que $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{3^n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$. Alors la suite (u_n) tend vers zéro sans jamais prendre la valeur 0, donc $u \in E$. Mais $u_n^c = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ diverge: en effet,

$$u_{2p}^c = \frac{2^{2p}}{3^{2p+1}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad u_{2p+1}^c = \frac{3^{2p+1}}{2^{2p+2}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\ .$$

Donc $u \notin E^c$.

d. Le réel l^c est défini par $l^c = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n^c$ sous réserve d'existence de cette limite. Comme $u_n^c \geq 0$ pour tout n, la stabilité des inégalités larges par passage à la limite entraîne $l^c \geq 0$. D'autre part, si on avait $l^c > 1$, on aurait $u_n^c > 1$ à partir d'un certain rang, donc la suite $\big(|u_n - l|\big)$, à valeurs positives, serait strictement croissante à partir d'un certain rang, et ne pourrait donc tendre vers 0. Cela contredit le fait que $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, l'hypothèse est donc absurde, et on a nécessairement $l^c \leq 1$, donc $l^c \in [0, 1]$.

2. Exemples de calculs de vitesse de convergence

a. • Soit $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^k}$, on a $u \in E^c$ (en généralisant le raisonnement fait en **1.a.**), et $l^c = \lim_{n\to+\infty} u_n^c = 1$, donc la convergence (vers 0) est lente.

• Avec $v_n = n^k q^n$, on a $v_n = e^{k\ \ln(n)+n\ \ln(q)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque, par croissances comparées, l'exposant de l'exponentielle tend vers $-\infty$. La suite (v_n) ne prend pas la valeur 0 (à partir du rang 1), donc $v \in E$. Ensuite, $v_n^c = \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = q\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q$, donc $v \in E^c$ et la vitesse de convergence est géométrique de rapport q.

• Avec $w_n = \dfrac{1}{n!}$, on a $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$, et $w_n \neq 0$ pour tout n, donc $w \in E$. Ensuite, $w_n^c = \dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $w \in E^c$ et sa convergence est rapide.

b.i. Posons $x = \dfrac{1}{2^n}$, alors $x \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ et

$$\begin{aligned} v_n &= \left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = \exp\left(\frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\right) \\ &= \exp\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) = e \cdot \exp\left(-\frac{x}{2} + o(x)\right) \\ &= e \cdot \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right). \end{aligned}$$

En remplaçant x par $\dfrac{1}{2^n}$, on obtient le développement demandé $v_n = e - \dfrac{e}{2^{n+1}} + o\Big(\dfrac{1}{2^n}\Big)$.

ii. On a donc $l = \lim_{n\to+\infty} v_n = e$, et l'inégalité stricte $\ln(1+x) < x$ pour $x > 0$ donne $2^n \ln\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right) < 1$ puis $v_n < e$ donc $v_n \neq e$ en prenant l'exponentielle, on a donc $v \in E$. Ensuite, $v_n - e \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{e}{2^{n+1}}$, donc

$$v_n^c = \left|\frac{v_{n+1}-e}{v_n - e}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2^{n+2}}\,\frac{2^{n+1}}{e} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Donc $v \in E^c$ et sa convergence est géométrique de rapport $\dfrac{1}{2}$.

c.i. Le réel $l - S_n$ est le reste d'ordre n de la série de Riemann (convergente) d'exposant α, on peut écrire $l - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \lim_{N\to+\infty}\Big(\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^\alpha}\Big)$. Or, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$, ce qui permet d'appliquer la méthode de comparaison série-intégrale: pour $k \geq 1$, on a $\dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$, soit encore, pour $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

En sommant ces inégalités pour k de $n+1$ à N, on obtient l'encadrement

$$\left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_{n+1}^{N+1} = \int_{n+1}^{N+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \le \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^\alpha} \le \int_{n}^{N}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_{n}^{N}\ .$$

En passant à la limite lorsque $N \to +\infty$, on obtient l'encadrement demandé

$$\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \le l - S_n \le \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}\ .$$

ii. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = l$ par définition de la somme d'une série convergente, et $S_n < l$ (donc différent de l) pour tout n, ainsi $(S_n) \in E$. Ensuite, $S_n^c = \dfrac{l-S_{n+1}}{l-S_n}$ et les inégalités du **i.** donnent facilement $\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{\alpha-1} \le \dfrac{l-S_{n+1}}{l-S_n} \le 1$. Comme $\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, le théorème d'encadrement permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^c = 1$, donc la suite (S_n) appartient à E^c et sa convergence est lente.

3. Vitesse de convergence d'ordre r d'une suite

a. Si la vitesse de convergence de (u_n) vers l est d'ordre $r > 1$, alors pour n assez grand (dès que l'on est sûr que la suite ne prend plus la valeur l), on a

$$\left|u_n^c\right| = \frac{|u_{n+1}-l|}{|u_n-l|} = \frac{|u_{n+1}-l|}{|u_n-l|^r}\cdot|u_n-l|^{r-1}\ .$$

Le premier facteur, qui est le $|w_n|$ de l'énoncé, est borné par hypothèse, le deuxième facteur tend vers 0, donc le produit tend vers 0, ce qui montre que la convergence de (u_n) est rapide.

Remarque: Avec des arguments très voisins, on montre que, si la convergence de (u_n) est d'ordre $r > 1$, alors elle est aussi d'ordre s, pour tout réel s tel que $1 < s < r$.

b.i. La série de terme général $\dfrac{1}{k!}$ est convergente (règle de d'Alembert par exemple), sa somme S vaut e mais c'est inutile ici de le savoir. Comme la suite (S_n) croît strictement, on a $S_n < S$ pour tout n, donc $S_n \ne S$ et $(S_n) \in E$.

ii. Le réel $S - S_n$ est le reste d'ordre n de la série exponentielle de terme général $\dfrac{1}{k!}$, donc $S - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!} \ge \frac{1}{(n+1)!}$. Majorons maintenant ce reste:

$$\begin{aligned}
S - S_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) \\
&\le \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)^k} \\
&\le \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\ .
\end{aligned}$$

iii. En explicitant, on a obtenu $\dfrac{1}{(n+1)!} \leq S - S_n \leq \dfrac{2}{(n+1)!}$. On en déduit que

$$0 \leq S_n^c = \frac{S - S_{n+1}}{S - S_n} \leq \frac{\dfrac{2}{(n+2)!}}{\dfrac{1}{(n+1)!}} = \frac{2}{n+2} \ .$$

Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^c = 0$, donc $(S_n) \in E^c$, et la convergence de (S_n) est rapide.

iv. Soit $r > 1$, on a alors

$$\frac{|S_{n+1} - S|}{|S_n - S|^r} = \frac{S - S_{n+1}}{(S - S_n)^r} \geq \frac{\dfrac{1}{(n+2)!}}{\left(\dfrac{2}{(n+1)!}\right)^r} = 2^{-r} \, \frac{\big((n+1)!\big)^{r-1}}{n+2} = 2^{-r} \left(\frac{(n+1)!}{(n+2)^{\frac{1}{r-1}}}\right)^{r-1} .$$

Comme la suite $(n!)$ est prépondérante devant toute "suite puissance" (n^α), on déduit que le minorant obtenu tend vers l'infini avec n, donc la suite (w_n) définie par $w_n = \dfrac{S_{n+1} - S}{|S_n - S|^r}$ n'est pas bornée, donc la convergence de (S_n) vers S n'est pas d'ordre r.

c.i. La dérivabilité de f en l entraîne sa continuité en ce point, donc $\lim\limits_{x\to l} f(x) = f(l)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, on a aussi $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$ par composition de limites, donc $f(l) = l$, i.e. le point l est un point fixe de f.

ii. On a $u_n \neq l$ pour tout n puisque, s'il existait un entier n_0 pour lequel $u_{n_0} = l$, on aurait $u_n = l$ pour tout $n \geq n_0$, la suite serait donc stationnaire. Donc $u \in E$. Ensuite,

$$u_n^c = \left|\frac{u_{n+1} - l}{u_n - l}\right| = \left|\frac{f(u_n) - f(l)}{u_n - l}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l^c = \big|f'(l)\big| \ .$$

En effet, on reconnaît un taux d'accroissement et on sait que $\lim\limits_{x\to l} \dfrac{f(x) - f(l)}{x - l} = f'(l)$.

Donc $u \in E^c$, et la vitesse de convergence est

- lente si $\big|f'(l)\big| = 1$;
- géométrique de rapport $\big|f'(l)\big|$ si $\big|f'(l)\big| \in]0, 1[$;
- rapide si $f'(l) = 0$.

On ne peut avoir $\big|f'(l)\big| > 1$ d'après **1.d.**

iii. D'après **1.d.**, on ne peut avoir $l^c > 1$. Si $\big|f'(l)\big| > 1$ et si la suite (u_n) n'était pas stationnaire, la question précédente montre que $u \in E^c$ avec $l^c > 1$ ce qui est absurde.

iv. Supposons $f^{(k)}(l) = 0$ pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$. Alors f admet au point l un développement limité à l'ordre r, qui est

$$f(x) = f(l) + \frac{f^{(r)}(l)}{r!} \, (x - l)^r + o\big((x-l)^r\big) \ .$$

On déduit que

$$\frac{u_{n+1}-l}{(u_n-l)^r}=\frac{f(u_n)-f(l)}{(u_n-l)^r}=\frac{f^{(r)}(l)}{r!}+o(1)\ ,$$

cette expression (qui est une suite convergente) est donc bornée, donc la vitesse de convergence est d'ordre r.

Pour la réciproque, procédons par contraposition: s'il existe $k\in[\![1,r-1]\!]$ tel que $f^{(k)}(l)\neq 0$, notons p le plus petit de ces entiers k, alors f admet au point l le développement limité à l'ordre p: $f(x)=f(l)+\dfrac{f^{(p)}(l)}{p!}\,(x-l)^p+o\big((x-l)^p\big)$ avec $f^{(p)}(l)\neq 0$, et alors

$$\frac{u_{n+1}-l}{(u_n-l)^r}=\frac{f(u_n)-f(l)}{(u_n-l)^r}=\frac{f^{(p)}(l)}{p!}(u_n-l)^{p-r}+o\big((u_n-l)^{p-r}\big)\ ,$$

et comme $p-r<0$, cette expression tend vers l'infini en valeur absolue, et n'est donc pas bornée, la vitesse de convergence n'est pas d'ordre r.

II. Accélération de convergence

Cette partie est un ajout personnel, mais ce sont des choses très classiques

4. Méthode de Richardson-Romberg

a. On a $v_n-l=\dfrac{u_{n+1}-\lambda u_n-l(1-\lambda)}{1-\lambda}=\dfrac{(u_{n+1}-l)-\lambda\,(u_n-l)}{1-\lambda}$, d'où

$$\frac{v_n-l}{u_n-l}=\frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}-\lambda\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{1-\lambda}\big(\lambda-\lambda\big)=0\ ,$$

donc (v_n) converge vers l plus rapidement que (u_n).

b. Du développement asymptotique proposé, on tire $u_n-l\underset{n\to+\infty}{\sim}a\lambda^n$, et $u_{n+1}-l\underset{n\to+\infty}{\sim}a\lambda^{n+1}$, donc $\dfrac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{a\lambda^{n+1}}{a\lambda^n}=\lambda$, autrement dit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}=\lambda$, ainsi (u_n) tend vers l avec une vitesse géométrique de rapport $|\lambda|$.

On développe par ailleurs

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{1}{1-\lambda}\big(u_{n+1}-\lambda u_n\big)\\
&= \frac{1}{1-\lambda}\Big(\big(l+a\lambda^{n+1}+b\mu^{n+1}+o(\mu^n)\big)-\lambda\,\big(l+a\lambda^n+b\mu^n+o(\mu^n)\big)\Big)\\
&= \frac{1}{1-\lambda}\Big((1-\lambda)\,l+b(\mu-\lambda)\,\mu^n+o(\mu^n)\Big)\\
&= l+b'\mu^n+o(\mu^n)\ ,\quad \text{avec}\quad b'=\frac{\mu-\lambda}{1-\lambda}\,b\neq 0\ .
\end{aligned}$$

Comme ci-dessus, on déduit $v_n-l\underset{n\to+\infty}{\sim}b'\mu^n$, $v_{n+1}-l\underset{n\to+\infty}{\sim}b'\mu^{n+1}$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{v_{n+1}-l}{v_n-l}=\mu$, la convergence de (v_n) vers l est géométrique de rapport $|\mu|$.

5. Exemple du calcul de π par la méthode d'Archimède

a. Si $x \in [0,1]$, alors $0 \leq x^2 \leq 1$, puis $0 \leq 1-x^2 \leq 1$, donc $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$, puis $0 \leq 1-\sqrt{1-x^2} \leq 1$, et enfin $0 \leq f(x) \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Comme $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq 1$, on a bien $f(x) \in [0,1]$, donc l'intervalle $I=[0,1]$ est stable par f, c'est-à-dire $I \subset D_f$ et $f(I) \subset I$.

On peut aussi observer que f est continue et croissante sur $[0,1]$ avec $f(0)=0$ et $f(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc

$$f\big([0,1]\big) = \big[f(0), f(1)\big] = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \subset [0,1]\,.$$

b. Si on pose $\theta = \operatorname{Arcsin}(x)$, alors $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ et $\sin(\theta)=x$, donc $1-x^2 = 1-\sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$ et, comme $\cos(\theta)$ est positif, $\sqrt{1-x^2} = \cos(\theta)$. Ensuite,

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2(1-\cos\theta)} = \frac{1}{2}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} \times 2\,\sin\frac{\theta}{2} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

car $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est positif.

c. La suite (x_n) prend ses valeurs dans $[0,1]$ (intervalle stable), on peut donc poser $\theta_n = \operatorname{Arcsin}(x_n)$ pour tout n, la question **b.** montre alors que $x_{n+1} = f(x_n) = \sin\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right)$, et comme $\dfrac{\theta_n}{2} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, cela entraîne $\theta_{n+1} = \operatorname{Arcsin}(x_{n+1}) = \dfrac{\theta_n}{2}$. On a donc immédiatement $\theta_n = \dfrac{\theta_0}{2^n}$ avec $\theta_0 = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$, finalement $x_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{6 \times 2^n}\right)$ pour tout n.

d. Donc $u_n = 6 \times 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{6\times 2^n}\right)$, puis $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 6 \times 2^n \times \dfrac{\pi}{6 \times 2^n} = \pi$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pi$.

e. Au voisinage de 0, on a $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)$, donc

$$\begin{aligned} u_n &= 6 \times 2^n \left(\frac{\pi}{6\times 2^n} - \frac{1}{6}\Big(\frac{\pi}{6\times 2^n}\Big)^3 + \frac{1}{120}\Big(\frac{\pi}{6\times 2^n}\Big)^5 + o\Big(\frac{1}{32^n}\Big)\right) \\ &= \pi - \frac{\pi^3}{6^3} \times \frac{1}{4^n} + \frac{\pi^5}{120 \times 6^4} \times \frac{1}{16^n} + o\Big(\frac{1}{16^n}\Big)\,. \end{aligned}$$

On reconnaît les conditions de la question **4.b.** avec $l=\pi$, $a = -\dfrac{\pi^3}{216}$, $b = \dfrac{\pi^5}{155520}$, $\lambda = \dfrac{1}{4}$ et $\mu = \dfrac{1}{16}$. La vitesse de convergence de (u_n) vers π est donc géométrique de rapport $\lambda = \dfrac{1}{4}$.

f. En reprenant la question **4.**, on construit une suite (v_n) telle que $v_n = \dfrac{u_{n+1}-\lambda u_n}{1-\lambda}$, soit $v_n = \dfrac{4}{3}u_{n+1} - \dfrac{1}{3}u_n$. On a alors $v_n = \pi - \dfrac{\pi^5}{622080} \times \dfrac{1}{16^n} + o\Big(\dfrac{1}{16^n}\Big)$, d'où une vitesse de convergence géométrique de rapport $\dfrac{1}{16}$.

6. Procédé d'accélération d'Aitken

a. On a $u_n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$, mais ce n'est pas très utile. En fait, $u_{n+1} - u_n = q^{n+1} \neq 0$ et $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = q^{n+2} - q^{n+1} = q^{n+1}(q-1) \neq 0$,

puis $\lambda_n = \dfrac{q^{n+1}}{q^n} = q$ et $w_n = \dfrac{u_{n+1} - qu_n}{1-q} = \dfrac{1}{1-q}$, la suite (w_n) est donc constante. *Lorsque la suite (u_n) converge, c'est le cas si et seulement si $|q| < 1$, alors la valeur constante de la suite (w_n) est la limite de la suite (u_n). Dans les autres cas, la suite (u_n) n'appartient pas à E.*

b. On a (en adaptant facilement lorsque $\lambda = 0$):

$$\lambda_n = \frac{(u_{n+1}-l)-(u_n-l)}{(u_n-l)-(u_{n-1}-l)} = \frac{\dfrac{u_{n+1}-l}{u_n-l} - 1}{1 - \dfrac{u_{n-1}-l}{u_n-l}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda - 1}{1 - \dfrac{1}{\lambda}} = \lambda \, .$$

Ensuite, $w_n = \dfrac{u_{n+1} - \lambda_n u_n}{1-\lambda_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{l - \lambda l}{1-\lambda} = l$, la suite (w_n) converge donc aussi vers l, et plus rapidement que la suite (u_n) puisque

$$\frac{w_n - l}{u_n - l} = \frac{u_{n+1} - l - \lambda_n(u_n - l)}{(1-\lambda_n)(u_n - l)} = \frac{1}{1-\lambda_n}\left(\frac{u_{n+1}-l}{u_n - l} - \lambda_n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\lambda}(\lambda - \lambda) = 0 \, .$$

c. C'est du calcul, le lecteur vérifiera patiemment que

$$w_n = \frac{u_{n+1} - \dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n - u_{n-1}}\, u_n}{1 - \dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}} = \frac{u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2}{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}} \, ,$$

et que, après réduction, l'expression $u_{n-1} - \dfrac{(u_n - u_{n-1})^2}{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}$ conduit au même résultat.

d. Posons $r = \left|\dfrac{\mu}{\lambda}\right|$ pour simplifier, alors $0 < r < 1$. Du développement asymptotique donné de u_n, on déduit

$$u_n - u_{n-1} = a(\lambda - 1)\lambda^{n-1} + O(\mu^n) = a(\lambda-1)\lambda^{n-1}\Big(1 + O(r^n)\Big) \, ,$$

d'où $(u_n - u_{n-1})^2 = a^2(\lambda-1)^2\lambda^{2n-2}\Big(1 + O(r^n)\Big)$. De façon semblable,

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = a\,(\lambda-1)^2\,\lambda^{n-1} + O(\mu^n) = a\,(\lambda-1)^2\,\lambda^{n-1}\Big(1 + O(r^n)\Big) \, .$$

Ensuite,

$$\frac{(u_n - u_{n-1})^2}{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}} = \frac{a^2(\lambda-1)^2\lambda^{2n-2}}{a\,(\lambda-1)^2\,\lambda^{n-1}}\Big(1 + O(r^n)\Big) = a\,\lambda^{n-1}\Big(1 + O(r^n)\Big) \, .$$

En retranchant cette expression de $u_{n-1} = l + a\,\lambda^{n-1} + O(\mu^n) = l + \dfrac{a}{\lambda}\,\lambda^n\Big(1 + O(r^n)\Big)$, on obtient bien $w_n = l + O(\lambda^n r^n) = l + O(\mu^n)$.