# DS de MATHÉMATIQUES numéro 1 COMMENTAIRES
# PSI2 2024-2025

## EXERCICE

Sur ce petit exercice, on départage clairement ceux qui savent rédiger des petits raisonnements simples de façon claire et précise, et ceux qui se perdent dans des considérations hors sujet (*continuité de la fonction par exemple, qui en fait n'intervient pas ici*), font de mauvaises hypothèses (*récurrences mal formulées par exemple*) ou lisent mal le sujet.

Concernant le dernier point, l'énoncé fait trois hypothèses différentes sur la fonction $f$ ($f(x) \geq x$ en **a.**, $f$ croissante en **b.**, $f$ décroissante en **c.**). La rédaction du sujet ("Dans cette question, on suppose...") indique clairement que l'hypothèse faite en **a.** ne doit plus être supposée pour la question **b.**

Pour la question **b.**, je pense que le plus efficace était de faire l'hypothèse $u_1 \leq u_0$ pour montrer ensuite par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} \leq u_n$ et conclure dans ce cas que la suite $(u_n)$ est décroissante, puis mentionner rapidement que, par les mêmes méthodes, l'hypothèse $u_1 \geq u_0$ conduit à la croissance de la suite.

Dans la question **c.**, il ne suffisait pas de prouver que, **si** $(v_n)$ est monotone, **alors** $(w_n)$ est monotone de sens contraire! Il faut bien commencer par démontrer qu'une des deux suites est effectivement monotone (par exemple en utilisant **b.** avec $f \circ f$ à la place de $f$).

**ATTENTION:** LORSQU'ON RÉDIGE UN RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE, IL EST IMPÉRATIF DE COMMENCER PAR ÉNONCER CLAIREMENT LA PROPRIÉTÉ $(\mathcal{P}_n)$ QUE L'ON SOUHAITE PROUVER.

## PROBLÈME

Ce problème, dont la fin est assez technique, fait utiliser, dans le cadre des études de suites, toutes les techniques d'analyse asymptotique du cours de première année (limites, équivalents, développements asymptotiques). Je signale qu'à aucun moment, il n'était utile de revenir à la définition de la limite avec les fameux $\varepsilon$ que certains semblent adorer, même s'ils n'en font pas souvent grand-chose de cohérent!

Attention à l'écriture des calculs asymptotiques! Il importe de distinguer les écritures suivantes:

- $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ (notion de limite, une écriture équivalente est $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, **la limite en question, si elle existe, ne peut pas dépendre de la variable** $n$) ;
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ (notion d'équivalent, l'équivalent en revanche peut dépendre de $n$) ;
- $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n)$ (développement limité ou asymptotique).

**1.b.** Il suffisait de constater que la suite nulle n'appartient pas à $E$, donc *a fortiori* n'appartient pas à $E^c$.

**1.c.** L'inclusion de $E^c$ dans $E$ est écrite dans la définition de $E^c$, il n'y a donc pas à la "démontrer". La véritable question est donc de prouver que cette inclusion est **stricte**, i.e. il existe des éléments de $E$ qui ne sont pas dans $E^c$, il fallait donc exhiber un tel élément.

**1.d.** Assez peu de bonnes réponses.

**2.a.** Assez facile. Parler tout de même de croissances comparées pour le deuxième exemple.

**2.b.** Assez standard. Mentionner les DL usuels utilisés.

**2.c.i.** L'idée de la comparaison série-intégrale a souvent été vue, mais pas toujours menée à terme. Ici, il s'agissait d'encadrer non pas une somme partielle de série, mais un reste de série convergente, il fallait donc ajouter les inégalités pour $k$ de $n+1$ à l'infini (ou d'abord de $n+1$ à un entier $N$, puis faire tendre $N$ vers $+\infty$).

**2.c.ii. ATTENTION AUX ERREURS DE MANIPULATION DES INÉGALITÉS!!!**

Par exemple, pour majorer un quotient de réels strictement positifs, on majore le numérateur, et on... **minore** le dénominateur. Que d'erreurs à ce sujet!

***Remarque.*** Pour ceux qui n'aiment pas manipuler les inégalités, cette question pouvait aussi se traiter avec des équivalents.

**3.a.** On voit parfois apparaître des "epsilon" qui n'ont rien à faire ici!

**3.b.ii.** Première inégalité facile, l'autre est plus subtile.

**3.b.iii.** On retrouve les mêmes erreurs de manipulation des inégalités qu'en **2.c.ii.**

**3.b.iv.** Plus subtil, demande une utilisation assez fine des croissances comparées si l'on veut rester dans les termes du programme.

**3.c.** Ne pas oublier de mentionner l'argument essentiel, qui est la **continuité** de $f$.

*Je passe un peu plus vite sur la fin du problème.*

**5.a.** Le calcul de $f(0)$ et de $f(1)$ ne suffit pas, il faut aussi s'assurer de la croissance de $f$ (mais le calcul de la dérivée ne me semble pas être le meilleur moyen).

**5.b. Deux études de signes sont nécessaires!!** D'abord $\sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$ car ici, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\theta$ est positif. Même chose quelques lignes plus loin avec $\sin\frac{\theta}{2}$.

**5.c. et suivantes.** Peu de réponses.

**6.** Quelques amateurs de calculs ont assez bien traité les questions **a.**, **b.**, **c.**