EXERCICES CORRIGÉS sur les SÉRIES NUMÉRIQUES
PSI2 2024-2025

Séries à termes positifs.

1. Déterminer la nature des séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$, avec $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ et $v_n = a^{\sqrt{n}}$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$.

- -

a. Pour la série $\sum u_n$, on applique la règle de d'Alembert (série à termes strictement positifs) :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}\,.$$

Comme $e^{-1} < 1$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

b. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = a^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = e^{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\ln a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ puisque $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure. Notons d'abord que, si $a \geq 1$, la série est grossièrement divergente. Si $0 < a < 1$, essayons la comparaison à une série de Riemann (*règle* $n^\alpha u_n$) : choisissons $\alpha = 2$, alors $n^2 v_n = n^2\,a^{\sqrt{n}} = e^{2\ln n + \sqrt{n}\,\ln a}$. Comme $\ln n = o(\sqrt{n})$ (*croissances comparées*), l'exposant $2\ln n + \sqrt{n}\,\ln a$ est équivalent à $\sqrt{n}\ln a$ et tend donc vers $-\infty$ (ici, $\ln a < 0$), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 v_n = 0$ ce qui signifie que $v_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et assure la convergence de la série. En conclusion, $\sum_{n\geq 0} a^{\sqrt{n}}$ (avec $a > 0$) converge si et seulement si $0 < a < 1$.

---

2. Pour quelles valeurs de l'entier naturel p la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^{np}}{(np)!}$ est-elle convergente ?

- -

C'est une série à termes strictement positifs, essayons la règle de d'Alembert : en posant $u_n = \dfrac{n^{np}}{(np)!}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{(n+1)p}}{n^{np}} \cdot \frac{(np)!}{\big((n+1)p\big)!} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p \times \frac{(n+1)^p}{(np+1)(np+2)\cdots(np+p)}\,.$$

Or, il est classique que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, et l'expression $\dfrac{(n+1)^p}{(np+1)(np+2)\cdots(np+p)}$ est, pour p fixé, un quotient de deux polynômes de degré p en la variable n : elle est donc équivalente (lorsque n tend vers $+\infty$) au quotient des termes dominants du numérateur et du dénominateur donc tend vers $\dfrac{1}{p^p}$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{e}{p}\right)^p$ et cette limite est strictement supérieure à 1 si $p \in \{1, 2\}$, strictement inférieure à 1 si $p \geq 3$.

Conclusion. La série converge si et seulement si $p \geq 3$.

---

3. Soit $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Donner un équivalent de $v_n = \ln(u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Déterminer l'ensemble I des réels α tels que la série $\sum_n u_n$ soit grossièrement divergente.

c. Si $\alpha \notin I$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\,u_n$. Que dire alors de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$?

- -

a. Tout d'abord, on a $\dfrac{1}{n} \in]0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où $\cos \dfrac{1}{n} > 0$ et u_n est bien défini pour $n \geq 1$. Ensuite,

$$\ln u_n = n^\alpha \ \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) = n^\alpha \ \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) = n^\alpha \ \left(- \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) ,$$

ou encore $\ln u_n \sim -\dfrac{1}{2}\, n^{\alpha-2}$.

b. • Pour $\alpha > 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$;

• pour $\alpha = 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = -\dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$;

• pour $\alpha < 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

En conclusion, $I =]-\infty, 2]$.

c. Dans cette question, on suppose donc $\alpha > 2$. Alors

$$\ln(n^2 u_n) = 2\ \ln n + \ln(u_n) = 2\ \ln n - \frac{1}{2}\, n^{\alpha-2} + o(n^{\alpha-2}) \ \sim\ -\frac{1}{2}\, n^{\alpha-2}$$

par croissances comparées des puissances et du logarithme. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n^2 u_n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$, donc $u_n = o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ et la série de terme général u_n est convergente.

---

4. Calculer les sommes des séries ci-dessous après avoir justifié leur convergence :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \qquad ; \qquad T = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) .$$

- -

a. Posons $u_n = \dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}$. On a $u_n \sim \dfrac{1}{9n^2}$, ce qui assure déjà la convergence de la série.

Décomposons en éléments simples : $u_n = \dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{1}{3n+1} - \dfrac{1}{3n+4}\Big) = \dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{1}{3n+1} - \dfrac{1}{3(n+1)+1}\Big)$.

Si l'on note S_n la somme partielle d'ordre n, on observe un télescopage :

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3(k+1)+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{3k+1}\right) = \frac{1}{3}\Big(1 - \frac{1}{3n+4}\Big) .$$

Il s'ensuit immédiatement que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{3}$, c'est-à-dire que $S = \dfrac{1}{3}$.

b. Posons $v_n = \ln\Big(1 + \dfrac{2}{n(n+3)}\Big)$. On a $v_n > 0$ et $v_n \sim \dfrac{2}{n^2}$, ce qui assure la convergence de la série. Décomposons un peu :

$$v_n = \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right) = \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln n - \ln(n+3) .$$

Ainsi, on observera aussi des télescopages en calculant une somme partielle : après quelques translations d'indices,

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n} v_k \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} \ln k + \sum_{k=3}^{n+2} \ln k - \sum_{k=1}^{n} \ln k - \sum_{k=4}^{n+3} \ln k \\
&= \ln 3 + \ln(n+1) - \ln(n+3) \\
&= \ln\left(\frac{3(n+1)}{n+3}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} T_n = \ln 3$, soit $T = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \ln 3$.

---

5. Sommes partielles de la série harmonique

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, puis $a_n = \ln n - H_n$.

a. Donner un équivalent de $a_{n+1} - a_n$. En déduire que la suite (a_n) converge.

b. En déduire que H_n admet un développement asymptotique de la forme $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, où γ est un réel (appelé **constante d'Euler**).

c. Calculer $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$.

- -

a. On a $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, d'où

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \big(\ln(n+1) - \ln n\big) - \big(H_{n+1} - H_n\big) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

autrement dit $a_{n+1} - a_n \sim \frac{1}{2n^2}$. donc la série $\sum_n (a_{n+1} - a_n)$ converge, c'est-à-dire la suite (a_n) converge.

b. Notons $l = \lim_{n\to+\infty} a_n$. On a $\lim_{n\to+\infty} (\ln n - H_n) = l$, ce qui s'écrit encore $\ln n - H_n = l + o(1)$, ou encore $H_n = \ln n - l + o(1)$, ce qui est bien le développement asymptotique demandé avec $\gamma = -l$.

c. La série converge puisque $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} \sim \frac{1}{2n^3}$. On décompose en éléments simples :

$$u_n := \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$$

On peut ainsi exprimer la somme partielle d'ordre n puis en écrire un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} S_n &:= \sum_{k=1}^{n} u_k = H_n + (H_{n+1} - 1) - 4\Big(H_{2n+1} - \frac{H_n}{2} - 1\Big) \\ &= 4H_n - 4H_{2n+1} + 3 + \frac{1}{n+1} \\ &= 4\,\big(\ln n + \gamma + o(1)\big) - 4\,\big(\ln(2n+1) + \gamma + o(1)\big) + 3 + o(1) \\ &= 4\,\ln\Big(\frac{n}{2n+1}\Big) + 3 + o(1)\,, \end{aligned}$$

donc $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 3 - 4\ln 2$.

---

6. Séries de Bertrand

On appelle ainsi les séries $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha\,(\ln n)^\beta}$, où α et β sont deux réels. On se propose d'étudier leur convergence.

a. On suppose $\alpha > 1$. En étudiant $n^\gamma u_n$, pour un choix convenable de γ, montrer que la série converge.

b. On suppose $\alpha < 1$. En considérant nu_n, montrer que la série diverge.

c. On suppose $\alpha = 1$. Par comparaison à une intégrale, discuter de la nature de la série $\sum u_n$.

- -

a. L'expression $n^\gamma u_n = n^{\gamma-\alpha}\,(\ln n)^{-\beta}$ tend vers zéro dès que l'exposant $\gamma - \alpha$ est strictement négatif (et ceci quel que soit le réel β) d'après les théorèmes de croissances comparées. Choisissons donc γ tel que $1 < \gamma < \alpha$ (ce qui est possible) ; on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = 0$ d'après ce qui précède, donc $u_n = o\Big(\dfrac{1}{n^\gamma}\Big)$, et la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\gamma}$ converge d'après le cours, donc par comparaison $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ converge.

b. Si $\alpha < 1$, alors $n\,u_n = n^{1-\alpha}\,(\ln n)^{-\beta}$ tend vers $+\infty$ (et ceci quel que soit le réel β) d'après les théorèmes de croissances comparées. Donc u_n est prépondérant devant $\dfrac{1}{n}$, autrement dit $\dfrac{1}{n} = o(u_n)$; comme on sait que la série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge, par comparaison, on déduit que la série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ diverge.

c. Pour $x \in [2, +\infty[$, posons $f(x) = \dfrac{1}{x\,(\ln x)^\beta}$. La fonction f est continue et positive sur $[2, +\infty[$, et elle est dérivable avec $f'(x) = -\dfrac{\beta + \ln x}{x^2\,(\ln x)^{\beta+1}}$; on a donc $f'(x) \leq 0$ pour x suffisamment grand (précisément pour $x \geq e^{-\beta}$), donc f est décroissante sur $\big[e^{-\beta}, +\infty\big[$.
Si n_0 est un entier avec $n_0 > e^{-\beta} + 1$, on obtient facilement pour $k \geq n_0$, les inégalités

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

d'où il résulte en sommant que, si $n > n_0$, alors

$$\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq \int_{n_0-1}^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Or, un calcul de primitive sur $[2, +\infty[$ donne

- si $\beta = 1$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t\,\ln t} = \ln(\ln t) + C$; - si $\beta \neq 1$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)^\beta} = \frac{1}{1-\beta}\,\frac{1}{(\ln t)^{\beta-1}} + C$.

On a donc la discussion suivante:

- si $\beta = 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \ln(\ln n) - \ln(\ln n_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc la série diverge ;

- si $\beta < 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{1-\beta}\left((\ln n)^{1-\beta} - (\ln n_0)^{1-\beta}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc la série diverge encore ;

- si $\beta > 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\beta-1}\,\frac{1}{\big(\ln(n_0-1)\big)^{\beta-1}}$, donc les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum f(n)$ sont majorées, et cette série converge alors.

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\,(\ln n)^\beta}$ converge donc si et seulement si $\beta > 1$.

Conclusion. La série de Bertrand $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha\,(\ln n)^\beta}$ converge donc si et seulement si

$$(\alpha > 1) \qquad \text{ou} \qquad (\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \beta > 1)\ .$$

---

7. Donner un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,\ln k}$

- -

C'est une classique comparaison série-intégrale. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\,\ln(x)}$ est continue, positive, décroissante (*facile*) sur $[2, +\infty[$. On a donc

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\,\ln(x)} \leq \frac{1}{k\,\ln(k)} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x\,\ln(x)}$$

pour tout $k \geq 3$, l'inégalité de gauche étant vraie aussi pour $k = 2$. En sommant ces inégalités pour k de 2 à n (en isolant toutefois le terme pour $k = 2$ dans l'inégalité de droite), on obtient

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\,\ln(x)} \leq S_n \leq \frac{1}{2\,\ln(2)} + \int_2^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x\,\ln(x)}\ .$$

Une primitive de f étant $x \mapsto \ln(\ln(x))$, ces intégrales se calculent. On obtient donc l'encadrement

$$\textbf{(*)} : \qquad \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \leq S_n \leq \frac{1}{2\ \ln(2)} + \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big)\ .$$

Les termes constants sont négligeables devant $\ln\big(\ln(n)\big)$ et $\ln\big(\ln(n+1)\big)$ qui tendent vers $+\infty$. Quelques manipulations des logarithmes permettent d'écrire

$$\ln\big(\ln(n+1)\big) = \ln\big(\ln(n)\big) + \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\big(\ln(n)\big)$$

puisque le deuxième terme (qui tend vers 0) est négligeable devant le premier (qui tend vers $+\infty$). Dans l'encadrement **(*)** ci-dessus, le minorant et le majorant sont sonc tous deux équivalents à $\ln\big(\ln(n)\big)$. Il résulte alors du théorème d'encadrement que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\big(\ln(n)\big)$.

---

8. Pour tout $x > 0$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$. Justifier l'existence de $S(x)$ et donner un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ (*pour cela, on pourra utiliser un encadrement par des intégrales*).

- -

Pour $x > 0$ donné, on a $0 \leq \dfrac{1}{(x+k)^2} \leq \dfrac{1}{k^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, d'où (comparaison de séries à termes positifs) l'existence de $S(x)$, c'est-à-dire convergence de la série définissant $S(x)$.

Pour $x > 1$ fixé, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(x+t)^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, cela permet d'obtenir, pour tout k entier naturel, l'encadrement $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{(x+t)^2} \leq \frac{1}{(x+k)^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{(x+t)^2}$. On somme pour k de 0 à n, où n est un entier naturel donné (et en mettant éventuellement de côté le terme pour $k = 0$ dans la majoration), on obtient

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1} = \int_0^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{(x+t)^2} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} \leq \frac{1}{x^2} + \int_0^{n} \frac{\mathrm{d}t}{(x+t)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}\ .$$

On passe à la limite ($n \to +\infty$) dans ces inégalités, on obtient, pour tout $x > 1$, l'encadrement

$$\frac{1}{x} \leq S(x) \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\ .$$

Comme $\dfrac{1}{x^2}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, on déduit $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

---

9. On pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Montrer que $R_n \sim \dfrac{1}{(n+1)!}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k$, puis $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

- -

- On a $R_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + R_{n+1}$. Or,

$$
\begin{aligned}
0 \leq R_{n+1} &= \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+2)!}\left(1+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{(n+3)(n+4)}+\cdots\right) \\
&\leq \frac{1}{(n+2)!}\left(1+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{(n+3)^2}+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{(n+2)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+3)^k} = \frac{1}{(n+2)!}\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{n+3}} \\
&= \frac{n+3}{n+2}\,\frac{1}{(n+2)!} \;\leq\; \frac{2}{(n+2)!}\ .
\end{aligned}
$$

On a donc $R_{n+1} = o\Big(\dfrac{1}{(n+1)!}\Big)$, puis $R_n \sim \dfrac{1}{(n+1)!}$.

- La série (à termes positifs) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} R_n$ est donc convergente. On sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = e$. Donc (on notera une interversion de sommations, qui ne pose pas de problème puisqu'il s'agit de sommes finies, mais que l'on fera néanmoins avec précaution!) :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} R_k &= \sum_{k=0}^{n}\Big(e-\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{p!}\Big) \\
&= (n+1)\,e - \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{p!} \\
&= (n+1)\,e - \sum_{p=0}^{n}\frac{n-p+1}{p!} \\
&= (n+1)\,e - (n+1)\,\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!} + \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(p-1)!} \\
&= (n+1)\,e - (n+1)\,(e-R_n) + e - R_n - \frac{1}{n!}\ .
\end{aligned}
$$

Après simplification, il reste $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k = e + n\,R_n - \frac{1}{n!}$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,R_n = 0$, il vient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = e$.

---

10. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente. Pour tout n, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

a. Démontrer la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} k u_k = (n+1)\,R_n$.

b. En supposant convergente la série $\sum nu_n$, montrer que $(n+1)\,R_n \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} ku_k$.

c. En déduire que les séries $\sum\limits_{n\geq 0} n\,u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} R_n$ sont de même nature et que, en cas de convergence, elles ont la même somme.

- -

a. Notons que $u_k = R_{k-1} - R_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} ku_k &= \sum_{k=1}^{n} k(R_{k-1} - R_k) = \sum_{k=1}^{n} kR_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} kR_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)R_k - \sum_{k=1}^{n} kR_k \;=\; R_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\big[(k+1)-k\big]\,R_k - nR_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} R_k - (n+1)\,R_n\ ,\end{aligned}$$

ce qui donne bien l'égalité demandée.

b. Fixons un entier n. Soit p un entier supérieur à n, on a alors

$$(n+1)\sum_{k=n+1}^{p} u_k = \sum_{k=n+1}^{p}(n+1)u_k \leq \sum_{k=n+1}^{p} ku_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} ku_k\ .$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient $(n+1)R_n = (n+1)\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} ku_k$.

c. • Si la série $\sum\limits_{n\geq 1} nu_n$ converge, alors ses restes $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} ku_k$ existent et tendent vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$; de la question **b.**, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)R_n = 0$ et, de la question **a.**, on déduit la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} R_n$ et l'égalité des sommes $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} R_k = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} ku_k$.

• Si la série $\sum\limits_{k\geq 0} R_k$ converge, soit $X = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} R_k$ sa somme ; la question **a.** montre que, pour tout n entier, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} ku_k = \sum\limits_{k=0}^{n} R_k - (n+1)R_n \leq \sum\limits_{k=0}^{n} R_k \leq X$: la série à termes positifs $\sum ku_k$, dont les sommes partielles sont majorées, est donc convergente ; en appliquant le point précédent, on retrouve bien sûr l'égalité des sommes.

---

11. Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}\backslash\{0\}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(n+1)}{f(n)}$. Quelle est la nature de la série $\sum f(n)$?

- -

On a $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\ln f(x)\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$, et (théorème des accroissements finis) :

$$\ln\left(\frac{f(n+1)}{f(n)}\right) = \ln f(n+1) - \ln f(n) = (\ln f)'(c_n) = \frac{f'(c_n)}{f(c_n)}\ , \quad \text{avec} \qquad c_n \in]n, n+1[\ .$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$, on a $\ln\left(\dfrac{f(n+1)}{f(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$, soit $\dfrac{f(n+1)}{f(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\alpha}$ (en convenant que $e^{-\infty} = 0$ et $e^{+\infty} = +\infty$). De la règle de d'Alembert, on déduit donc que la série $\sum\limits_{n\geq 0} f(n)$ converge si $\alpha < 0$ et diverge si $\alpha > 0$. On ne peut pas conclure si $\alpha = 0$ (*cas exclu par l'énoncé*).

---

12. Soit $\alpha > 0$. On considère une suite réelle (u_n), définie par

$$u_1 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^{\alpha}\, u_n}\ .$$

Pour quelles valeurs de α la suite (u_n) est-elle convergente ?

- -

Il est clair que u_n est défini et $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (récurrence immédiate). Donc la suite (u_n) est croissante. Par ailleurs, la suite (u_n) converge si et seulement si la série télescopique associée $\sum\limits_{n\geq 1}(u_{n+1} - u_n)$ converge, c'est-à-dire si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{\alpha}\, u_n}$ converge.

• On a $u_n \geq u_1 > 0$ (suite croissante), donc $0 < \dfrac{1}{n^{\alpha} u_n} \leq \dfrac{1}{n^{\alpha}\, u_1}$. Or, pour $\alpha > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{\alpha}\, u_1}$ est convergente (série de Riemann). Par comparaison de séries à termes positifs, on conclut que, dans ce cas, la série $\sum\limits_{n\geq 1}(u_{n+1} - u_n)$ converge, donc la suite (u_n) converge.

• Réciproquement, supposons la suite (u_n) convergente, soit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors $0 < u_n \leq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puisque la suite (u_n) est croissante, donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^{\alpha}\, u_n} \geq \frac{1}{n^{\alpha}\, l}\ .$$

Mais la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge par hypothèse, donc aussi la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\alpha}\, l}$ par comparaison de séries à termes positifs, et ceci entraîne $\alpha > 1$ (séries de Riemann).

Bilan : La suite (u_n) converge si et seulement si $\alpha > 1$.

13*. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ pour tout n.

a. Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_{n-1}}$ est de même nature que la série $\sum u_n$.

En cas de divergence de cette dernière, on écrira un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

b. On suppose que la série $\sum u_n$ diverge. Montrer que, pour tout $\alpha > 1$, la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

c. On suppose que la série $\sum u_n$ converge, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ pour tout n. Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{R_n}$ est divergente.

- -

La suite (S_n) est à valeurs strictement positives, et croissante.

a. • Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}_+^*$, donc $\dfrac{u_n}{S_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{S}$. Comme la série $\sum \dfrac{u_n}{S}$ converge, par le critère des équivalents (*termes positifs*), on déduit la convergence de $\sum \dfrac{u_n}{S_{n-1}}$.

• La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ étant décroissante, pour tout $k \geq 1$, on a

$$\int_{S_{k-1}}^{S_k} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln\left(\frac{S_k}{S_{k-1}}\right) \leq \frac{S_k - S_{k-1}}{S_{k-1}} = \frac{u_k}{S_{k-1}} \ .$$

En sommant pour k de 1 à n, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{S_{k-1}} \geq \int_{S_0}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)$.

Si la série $\sum u_n$ diverge, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right) = +\infty$, donc par comparaison la série $\sum \dfrac{u_n}{S_{n-1}}$ est divergente (ses sommes partielles tendent vers $+\infty$).

b. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante donc, pour tout $k \geq 1$, on peut écrire

$$\frac{u_k}{S_k^\alpha} = \frac{S_k - S_{k-1}}{S_k^\alpha} \leq \int_{S_{k-1}}^{S_k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{S_{k-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_k^{\alpha-1}}\right) .$$

En sommant pour k de 1 à n, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{S_k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{S_0^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{1}{(\alpha-1)\, S_0^{\alpha-1}}$.

La série $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées, elle est donc convergente.

c. La suite (R_n) est décroissante et tend vers zéro. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ étant décroissante, on a, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_k}{R_k} = \frac{R_{k-1} - R_k}{R_k} \geq \int_{R_k}^{R_{k-1}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln\left(\frac{R_{k-1}}{R_k}\right) .$$

En sommant pour k de 1 à n, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{R_k} \geq \ln\left(\frac{R_0}{R_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La série $\displaystyle\sum \frac{u_n}{R_n}$ est donc divergente.

14.a. Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs, soit α un réel positif. On suppose que la série de terme général $n^\alpha u_n$ converge. En encadrant l'expression $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} k^\alpha u_k$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha+1} u_n = 0$.

b*. Donner un exemple de série à termes positifs $\sum u_n$, convergente, telle que la suite $(n\, u_n)$ ne tende pas vers zéro.

- -

a. Pour $n+1 \leq k \leq 2n$, on a $n^\alpha u_{2n} \leq k^\alpha u_k \leq (2n)^\alpha u_n$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$n^{\alpha+1} u_{2n} \leq S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} k^\alpha u_k \leq 2^\alpha n^{\alpha+1} u_n .$$

La majoration ne sert à rien! Par ailleurs, si la série $\sum n^\alpha u_n$ converge, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$. On a donc par majoration (termes positifs) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha+1} u_{2n} = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (2n)^{\alpha+1} u_{2n} = 0$. Enfin,

$$0 \leq (2n+1)^{\alpha+1} u_{2n+1} \leq (2n+2)^{\alpha+1} u_{2n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} (2n)^{\alpha+1} u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (2n+1)^{\alpha+1} u_{2n+1} = 0$. Finalement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha+1} u_n = 0$ puisque la suite extraite des termes d'indice pair et celle des termes d'indice impair tendent toutes deux vers zéro.

b. Posons $u_{2^n} = \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $u_k = 0$ pour tout entier k qui n'est pas une puissance de 2. Alors la série à termes positifs $\sum u_k$ converge puisque ses sommes partielles sont majorées par $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$, mais la suite $v_n = n u_n$ ne tend pas vers zéro puisqu'elle admet une suite extraite (v_{2^n}) constante de valeur 1.

Séries alternées.

15. Nature de la série $\sum u_n$ dans chacun des cas suivants ?

a) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$; **b)** $u_n = \sin\left(\dfrac{n^3+1}{n^2+1}\,\pi\right)$; **c)** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.

- -

a. Déjà si $\alpha \leq 0$, le terme u_n n'est pas défini pour n impair.

Supposons donc $\alpha > 0$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} = 0$, et $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$, mais cela ne permet pas de conclure (**série alternée!**). Développons un peu plus: on a $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} - \dfrac{1}{2n^{2\alpha}} + o\Big(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\Big)$, soit $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $w_n \sim -\dfrac{1}{2n^{2\alpha}}$.

Le critère des séries alternées permet d'affirmer que $\sum v_n$ converge puisque l'expression $|v_n| = \dfrac{1}{n^\alpha}$ tend vers zéro en décroissant. Comme w_n reste de signe constant (négatif) à partir d'un certain rang, le critère des équivalents s'applique ici, et la série $\sum w_n$ est de même nature que $\sum \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$, donc convergente **ssi** $\alpha > \dfrac{1}{2}$. Sachant que cv + cv = cv et cv + div = div, on a finalement:

Bilan. La série $\sum u_n$ converge **ssi** $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

b. On transforme un peu u_n, en utilisant $\sin(n\pi + x) = (-1)^n \sin(x)$ avec $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
u_n &= \sin\Big(n\pi - \frac{n-1}{n^2+1}\pi\Big) = (-1)^{n+1} \sin\Big(\frac{n-1}{n^2+1}\pi\Big) \\
&= (-1)^{n+1} \sin\left[\frac{\pi}{n}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)^{-1}\right] \\
&= (-1)^{n+1} \sin\left[\frac{\pi}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right] \\
&= (-1)^{n+1} \left[\frac{\pi}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right]
\end{aligned}$$

en utilisant notamment le développement $\sin x = x + O(x^2)$ au voisinage de 0. Donc $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{n}$ et $w_n = O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. La série $\sum v_n$ est semi-convergente par le critère des séries alternées. La série $\sum w_n$ et absolument convergente. Donc la série $\sum u_n$ converge

c. On voudrait appliquer le critère des séries alternées, mais il faudrait pour cela que la suite (v_n), avec $v_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ soit décroissante et tende vers zéro, et cela n'a rien d'évident! Posons alors $x_n = -\ln(v_n) = \ln\big(\sqrt[n]{n!}\big)$, et montrons que (x_n) est croissante et tend vers $+\infty$. D'abord $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\ln(k)$. Donc (*détails des calculs laissés à l'improbable lecteur*):

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n(n+1)}\Big(n\,\ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\ln k\Big)\,.$$

Ainsi écrit, il est clair que $x_{n+1} - x_n > 0$, donc la suite (x_n) est croissante.
Ensuite, la fonction ln étant croissante, une comparaison à une intégrale donne la minoration

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \geq \frac{1}{n} \int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x = \ln n - 1 + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty ,$$

ce qui permet de conclure que la série $\sum u_n$ converge puisque les hypothèses du critère des séries alternées sont satisfaites.

---

16. Nature des séries $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$, avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln\big(n + (-1)^n\big)}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n}$.

- -

a. Développons:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\ln(n) + \ln\Big(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\Big)} = \frac{(-1)^n}{\ln(n) + \dfrac{(-1)^n}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)} \\ &= \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n\ \ln(n)} + o\Big(\frac{1}{n\ \ln(n)}\Big)\right)^{-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n\ \ln(n)} + o\Big(\frac{1}{n\ \ln(n)}\Big)\right) = u'_n + u''_n \end{aligned}$$

avec $u'_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$ et $u''_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n\ \ln(n)^2}$. La série $\sum u'_n$ converge grâce au critère des séries alternées. La série $\sum \dfrac{1}{n\ \ln(n)^2}$ est une série de Bertrand convergente (*ce n'est pas au programme, mais on le retrouve par une comparaison série-intégrale, cf. exercice* **6.c.** *ci-dessus*). Par le critère des équivalents, on déduit que $\sum u''_n$ est (absolument) convergente. Enfin, par somme, la série $\sum u_n$ converge.

b. Développons aussi:

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}\right)} = \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\ln(n)} + o\Big(\frac{1}{\ln(n)}\Big)\right) = v'_n + v''_n$$

avec $v'_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$ et $v''_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{\ln(n)^2}$. La série $\sum v'_n$ converge grâce au critère des séries alternées. La série à termes positifs $\sum \dfrac{1}{\ln(n)^2}$ diverge car $\dfrac{n}{\ln(n)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par comparaison à la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$. Donc, par le critère des équivalents (*les termes sont de signe constant*), $\sum v''_n$ diverge. Enfin, par somme, $\sum v_n$ diverge.

---

17. En utilisant l'égalité $\dfrac{1}{n+1} = \displaystyle\int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t$, calculer les sommes suivantes :

$$A=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\quad ;\qquad B=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\quad ;\qquad C=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right)\ .$$

- -

a. Notons A_n la somme partielle d'ordre n et exprimons-la autrement :

$$\begin{aligned}A_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1\frac{1-(-1)^nt^n}{1+t}\,\mathrm{d}t=\ln 2+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\quad\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\quad\ln 2\end{aligned}$$

puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t=0$ (en effet, on a $\displaystyle 0\leq\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\leq\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}$). Donc $A=\ln 2$.

b. Même idée, notons B_n la somme partielle d'ordre n :

$$\begin{aligned}B_n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1\frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\quad\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\quad\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=0$ (en effet, on a $\displaystyle 0\leq\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\leq\int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2n+3}$). Donc $B=\dfrac{\pi}{4}$.

c. D'après le calcul précédent, $\displaystyle r_n:=\frac{\pi}{4}-B_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Calculons donc une somme partielle

$$\begin{aligned}C_n &= \sum_{k=0}^{n}r_k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\int_0^1\frac{t^{2k+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{-t^2}{1+t^2}\left(\sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1\frac{-t^2}{1+t^2}\,\frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=C+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{2n+4}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t\quad\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\quad C\ ,\end{aligned}$$

où $\displaystyle C=-\int_0^1\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$, car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^{2n+4}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=0$ (*toujours les mêmes arguments*). Le changement de variable $t=\tan x$, puis une linéarisation, donnent

$$C=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}\ .$$

---

18. Soit (a_n) une suite définie par la donnée de $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la relation de récurrence $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.

a. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_n (-1)^n a_n$.

b. Montrer que $\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \sim -\dfrac{a_n}{2}$. En déduire que la série $\displaystyle\sum_n a_n$ diverge.

- -

Étudions d'abord la suite (a_n) : la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x)$ est définie sur $]-1, +\infty[$. L'intervalle $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ est stable par f, donc la suite (a_n) est bien définie et $a_n > 0$ pour tout n ; la suite (a_n) est donc minorée par 0. De plus, $\forall x \in]-1, +\infty[\quad \ln(1 + x) \leq x$ (*inégalité usuelle*), donc la suite (a_n) est décroissante. Cette suite est donc convergente et sa limite l vérifie $\ln(1+l) = l$ puisque f est continue sur son intervalle de définition. L'équation $f(l) = l$ admet pour seule solution 0 (*étudier* $g : x \mapsto \ln(1 + x) - x$), donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

a. La suite (a_n) tend vers zéro en décroissant, donc la série $\sum(-1)^n a_n$ converge (*critère spécial des séries alternées*).

b. On a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\ln(1 + a_n)}{a_n}$ et, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_n) = 0$, on peut utiliser le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\ln(1+x)$ pour obtenir $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{a_n}{2} + o(a_n)$, puis $\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = -\dfrac{a_n}{2} + o(a_n)$, c'est-à-dire $\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \sim -\dfrac{a_n}{2}$, ou encore $a_n \sim -2\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Les séries $\displaystyle\sum_n a_n$ et $\displaystyle\sum_n \left(-2\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right)$ sont à termes strictement positifs, l'équivalence obtenue permet alors d'affirmer qu'elles sont de même nature. Calculons alors une somme partielle de la deuxième série :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(-2\ln\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)\right) = -2\sum_{k=0}^{n}\big(\ln(a_{k+1}) - \ln(a_k)\big) = -2\,\big(\ln(a_{n+1}) - \ln(a_0)\big) \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad +\infty$$

puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$. La série $\sum a_n$ est donc divergente.

---

19. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe un réel α tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\ .$$

a. On pose $v_n = n^\alpha u_n$. Montrer que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ est convergente.

b. En déduire l'existence d'une constante strictement positive K telle que $u_n \sim \dfrac{K}{n^\alpha}$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

c. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^n}{n!\, e^n}$.

- -

a. On a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^\alpha \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \dfrac{\alpha}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)\right)\left(1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)\right) = 1 + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$, donc $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right) = O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ est le terme général d'une série absolument convergente, donc convergente.

b. La série $\sum \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, c'est-à-dire $\sum \big(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)\big)$ est télescopique, sa convergence équivaut donc à la convergence de la suite de terme général $\ln(v_n)$. Posons donc $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(v_n)$. Par continuité de la fonction exponentielle, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = K$, avec $K = e^l > 0$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = K$, soit $u_n \sim \dfrac{K}{n^\alpha}$. On en déduit que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

c. On développe

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{2n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) = 1-\frac{1}{2n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\,.\end{aligned}$$

L'hypothèse est satisfaite avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$, donc la série $\sum u_n$ est divergente.

---

20. En utilisant la formule de Stirling, calculer $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

- -

Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \,\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \,\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \,\big[\ln(k+1)-\ln(k)\big]$, somme partielle d'ordre n. Transformons S_{2n}, en regroupant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs:

$$\begin{aligned}S_{2n} &= \sum_{p=1}^{n}\Big(\ln(2p+1)-\ln(2p)\Big)-\sum_{p=1}^{n}\Big(\ln(2p)-\ln(2p-1)\Big)\\ &= \sum_{p=1}^{n}\ln(2p+1)+\sum_{p=0}^{n-1}\ln(2p+1)-2\sum_{p=1}^{n}\ln(2p)\\ &= \ln(2n+1)+2\sum_{p=1}^{n-1}\ln(2p+1)+\ln(1)-2\sum_{p=1}^{n}\ln(2p)\\ &= \ln\left(\left(\frac{3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)}\right)^2\times(2n+1)\right)\\ &= \ln\left(\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2(2n+1)\right).\end{aligned}$$

Ainsi, $\exp(S_{2n}) = \left(\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 (2n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,\dfrac{n\,\big((2n)!\big)^2}{2^{4n}\,(n!)^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{\pi}$ en utilisant la formule de Stirling (*détail du calcul laissé au lecteur*). Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$, et comme

$S_{2n+1} - S_{2n} = -\ln\Big(1 + \dfrac{1}{2n+1}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \dfrac{2}{\pi}$, on a donc prouvé la convergence de la série proposée et $S = \ln\Big(\dfrac{2}{\pi}\Big)$.

---

21. Pour tout n entier naturel, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

a. Justifier l'existence de R_n.

b. Montrer que $R_n + R_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.

c. En déduire un équivalent de R_n.

d. Quelle est la nature de la série de terme général R_n ?

- -

a. R_n est le reste d'ordre n d'une série convergente (critère des séries alternées).

b. Par un décalage d'indice,

$$\begin{aligned} R_n + R_{n+1} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\Big) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} \;. \end{aligned}$$

c. La suite $\Big(\dfrac{1}{k(k+1)}\Big)$ est décroissante et tend vers zéro, le critère des séries alternées permet donc d'affirmer que

$$\big|R_n + R_{n+1}\big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}\Big| \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} \;,$$

donc, asymptotiquement, $R_n + R_{n+1} = O\big(\dfrac{1}{n^2}\big)$. mais on a aussi $R_n - R_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$. En ajoutant ces deux relations, on a $2R_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} + O\big(\dfrac{1}{n^2}\big)$, d'où il résulte que $R_n \sim \dfrac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} \sim \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$.

d. De $R_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + O\big(\dfrac{1}{n^2}\big)$, on déduit la convergence de la série de terme général R_n comme somme de deux séries convergentes (une semi-convergente par le critère spécial, une absolument convergente).

22*. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $p_n = n!\, u_n$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} \leq e \leq u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$. En déduire que le nombre e est irrationnel.

b. Montrer que p_n est un entier naturel pour tout n. Écrire une relation de récurrence vérifiée par p_n. En déduire la parité de p_n.

c. Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \sin(\pi\, e\, n!)$? *On écrira* $\sin(\pi\, e\, n!) = \sin\left[\pi(p_n + t_n)\right]$ *et on donnera un encadrement de* t_n.

- -

a. On sait que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$, et il est immédiat que la suite (u_n) est croissante, d'où l'inégalité $u_n \leq e$ pour tout n, et donc $u_{n+1} \leq e$. En posant $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$, on a aussi $\lim_{n \to +\infty} v_n = e$, mais la suite (v_n) est décroissante puisque

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = -\frac{1}{n(n+1)\,(n+1)!} \leq 0\ ;$$

on a donc $v_n \geq e$ pour tout n, ce qu'il fallait démontrer.

Par l'absurde, supposons e rationnel, autrement dit supposons $e = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$.

La double inégalité ci-dessus est vraie en particulier au rang q: $u_{q+1} \leq e \leq u_q + \frac{1}{q \cdot q!}$, et en encadrant encore (strictement car $q \geq 2$) :

$$u_q < u_{q+1} \leq e \leq u_q + \frac{1}{q \cdot q!} < u_q + \frac{1}{q!}\ .$$

Multiplions tout par $q!$, on obtient $q!\, u_q < q!\, e < q! u_q + 1$ (inégalités strictes). Mais $q! e = q!\, \frac{p}{q} = (q-1)!\, p$ est un entier, et $q! u_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} = \sum_{k=0}^{q} (k+1)(k+2)\cdots(q-1)q$ est aussi un entier. L'entier naturel $q! e$ serait donc compris strictement entre deux entiers consécutifs, ce qui est bien sûr une absurdité. On en déduit que le nombre e est irrationnel : $e \notin \mathbb{Q}$.

b. Le fait que $p_n = n!\, u_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est entier, a été expliqué à la question précédente. On a

$$p_{n+1} = (n+1)!\, u_n = (n+1)! \left(u_n + \frac{1}{(n+1)!}\right) = (n+1)\, p_n + 1\ .$$

Avec $p_0 = 1$ et la relation $p_{n+1} = (n+1)\, p_n + 1$, on montre facilement par récurrence (*détails laissés à l'improbable lecteur*) que, pour tout n, l'entier p_n est de parité opposée à celle de n.

c. On a $\pi\, e\, n! = \pi\, n! \left[u_n + (e - u_n)\right] = \pi(p_n + t_n)$, en posant $t_n = n!\,(e - u_n)$. L'encadrement de la question **a.** donne $\frac{1}{n+1} \leq t_n \leq \frac{1}{n}$, donc la suite (t_n) tend vers zéro, en décroissant puisque l'on peut enchaîner les inégalités: $t_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1} \leq t_n \leq \dfrac{1}{n}$. La fonction sinus étant croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on déduit que la suite $\big(\sin(\pi\, t_n)\big)$ est aussi décroissante de limite nulle. Enfin,

$$\sin(\pi\, e\, n!) = \sin(p_n\, \pi + \pi\, t_n) = (-1)^{p_n}\ \sin(\pi\, t_n) = (-1)^{n+1}\ \sin(\pi\, t_n)$$

puisque p_n est un entier qui a la même parité que $n+1$.
On a utilisé la relation $\sin(k\pi + x) = (-1)^k\ \sin x$ *pour* k *entier relatif.*
Par le critère spécial des séries alternées, on déduit alors que la série de terme général $\sin(\pi\, e\, n!)$ converge.

---

23. Soit x un réel non multiple de 2π. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

a. Montrer que la suite (S_n) est bornée.

b. En remarquant que $\cos(nx) = S_n - S_{n-1}$, montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{\cos(nx)}{n}$ est convergente.

c. En exploitant l'inégalité $|\cos(\theta)| \geq \cos^2(\theta)$, montrer la divergence de la série $\sum |u_n|$.

- -

a. Un calcul classique, utilisant l'exponentielle complexe, donne $S_n = \dfrac{\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x\right) + \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{2\ \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$.

Donc $|S_n| \leq \dfrac{1}{\left|\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|}$ et la suite (S_n) est bornée.

b. Exprimons une somme partielle de la série à étudier:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} = -S_0 + \frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) S_k \\
&= \frac{S_n}{n} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)}\ .
\end{aligned}$$

De **a.**, on déduit que $\dfrac{S_k}{k(k+1)} = O\Big(\dfrac{1}{k^2}\Big)$, la série de terme général $\dfrac{S_k}{k(k+1)}$ est donc convergente. Comme (S_n) est bornée, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0$. Les sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ admettent donc une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, ce qu'il fallait démontrer.

c. On a $|u_n| = \dfrac{|\cos(nx)|}{n} \geq \dfrac{\cos^2(nx)}{n} = \dfrac{1 + \cos(2nx)}{2n}$. Distinguons deux cas:

- si x est multiple de π, on a $|u_n| \geq \dfrac{1}{n}$, d'où la divergence ;

- sinon, la série $\sum \dfrac{\cos(2nx)}{2n}$ converge d'après **b.**, alors que $\sum \dfrac{1}{2n}$ diverge. Par somme, la série à termes positifs $\sum \dfrac{1+\cos(2nx)}{2n}$ diverge, puis $\sum |u_n|$ diverge par comparaison.

24.a. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\, e^{int}\, \mathrm{d}t = 0$.

b. Soit $x \in]0, 2\pi[$, soit n un entier naturel non nul. Prouver l'identité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx} - e^{ik\pi}}{ik} = -\frac{1}{2i} \int_\pi^x \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin\dfrac{t}{2}} \left(1 - e^{int}\right) \mathrm{d}t\ .$$

c. Convergence et somme de $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k}$.

- -

a. Par une i.p.p., on obtient

$$\int_a^b f(t)\, e^{int}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{in}\left(\Big[f(t)\, e^{int}\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)\, e^{int}\, \mathrm{d}t\right),$$

d'où la majoration $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\, e^{int}\, \mathrm{d}t\right| \leq \dfrac{C}{n}$, avec par exemple

$$C = \big|f(a)\big| + \big|f(b)\big| + \int_a^b \big|f'(t)\big|\, \mathrm{d}t\ ,$$

et la conclusion en découle.

b. Calculons:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx} - e^{ik\pi}}{ik} &= \sum_{k=1}^{n} \int_\pi^x e^{ikt}\, \mathrm{d}t \ = \ \int_\pi^x e^{it} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikt}\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_\pi^x e^{it} \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}}\, \mathrm{d}t \ = \ \int_\pi^x e^{i\frac{t}{2}} \frac{1 - e^{int}}{-2i\, \sin\dfrac{t}{2}}\, \mathrm{d}t\ ,
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

c. Soit $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k}$ la somme partielle d'ordre n. D'après **b.**, on peut écrire

$$S_n(x) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\pi}}{k} - \frac{1}{2} \int_\pi^x \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin\dfrac{t}{2}}\, \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_\pi^x \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin\dfrac{t}{2}}\, e^{int}\, \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{x} \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\, i(x-\pi) + \frac{1}{2} \int_{\pi}^{x} \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin \frac{t}{2}}\, e^{int} \,\mathrm{d}t \,.$$

Lorsque n tend vers l'infini, la dernière intégrale tend vers 0 d'après **a.** puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin \frac{t}{2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\pi, x]$ ou $[x, \pi]$. Il est classique que la série harmonique alternée converge et a pour somme $\ln(2)$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \ln(2)$, on en déduit la convergence de la suite $\big(S_n(x)\big)$ et

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k} = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = -\ln(2) - \ln\left(\sin \frac{x}{2} \right) - \frac{i}{2}\,(x-\pi) \,.$$

Ainsi, pour $x \in]0, 2\pi[$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k} = -\ln(2) - \ln\left(\sin \frac{x}{2} \right)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$.

Autres exercices sur les séries.

25. On note l^1 l'ensemble des suites réelles **sommables**, c'est-à-dire des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ soit absolument convergente.

On note l^2 l'ensemble des suites réelles **de carré sommable**, c'est-à-dire des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^2$ soit (absolument) convergente.

a. Montrer que l^1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b. Montrer que $l^1 \subset l^2$, et montrer que cette inclusion est stricte.

c. Soient $u \in l^2$, $v \in l^2$. Montrer que $uv \in l^1$, où uv est la suite réelle définie par $(uv)_n = u_n v_n$.

d. En déduire que l^2 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

e. Pour $u \in l^2$, $v \in l^2$, on pose $\displaystyle < u, v >= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur l^2.

- -

a. On a $0 \in l^1$ donc $l^1 \neq \emptyset$. Si $u \in l^1$, il est clair que $\lambda u \in l^1$ pour tout λ réel. Enfin, si u et v sont dans l^1, alors les séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ sont convergentes donc la série $\sum \big(|u_n| + |v_n|\big)$ converge ; de l'inégalité triangulaire $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$, on déduit, par comparaison de séries à termes positifs, que $u + v \in l^1$. L'ensemble l^1 est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b. Si $u \in l^1$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a donc $|u_n| \leq 1$ à partir d'un certain rang. Pour n assez grand, il vient alors $0 \leq u_n^2 \leq |u_n|$. Par comparaison de séries à termes positifs, on déduit que $\sum u_n^2$ converge. On a ainsi prouvé l'inclusion $l^1 \subset l^2$. L'inclusion est stricte puisque la suite u définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est de carré sommable, mais n'est pas sommable.

c. On a $|u_n v_n| \leq \dfrac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$, conséquence de l'identité remarquable

$$\big(|u_n| - |v_n|\big)^2 = u_n^2 - 2|u_n|\,|v_n| + v_n^2 \geq 0 \ .$$

Si u et v appartiennent à l^2, on obtient ainsi que la série $\sum |u_n v_n|$ converge, donc $uv \in l^1$.

d. On a $0 \in l^2$ donc $l^2 \neq \emptyset$. Si $u \in l^2$, il est clair que $\lambda u \in l^2$ pour tout λ réel. Enfin, si u et v sont dans l^2, alors la série $\sum u_n v_n$ converge (absolument) d'après **c.**, et de $(u_n + v_n)^2 = u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2$, on déduit que la série $\sum (u_n + v_n)^2$ est convergente, donc $u + v \in l^2$. Ainsi, l^2 est bien un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

e. Si u et v sont dans l^2, alors la série $\sum u_n v_n$ converge d'après **c.**, donc $< u, v >$ est bien défini. Le caractère bilinéaire de $< \cdot, \cdot >$ est une formalité. On a $< u, u >= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \geq 0$ et, si cette expression est nulle, alors tous les termes sont nuls (*somme de termes positifs*), donc $\forall n \in \mathbb{N} \ \ u_n = 0$, soit $u = 0$. On a ainsi prouvé le caractère défini positif, on a bien affaire à un produit scalaire sur l'espace vectoriel l^2.

---

26. On admet le développement asymptotique $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a. En déduire la somme de la série harmonique alternée

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

b. On modifie l'ordre des termes de cette dernière série de la façon suivante:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} + \cdots$$

Montrer que la nouvelle série obtenue converge et calculer sa somme.

c. Plus généralement, soient p et q deux entiers naturels non nuls. On considère une série construite à partir de la série harmonique alternée en sommant alternativement p termes impairs (positifs), puis q termes pairs (négatifs), et ainsi de suite. Quelle est la somme de cette série ?

- -

a. Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ la somme partielle d'ordre n de cette nouvelle série. On a alors $S_{2n} = \left(1 + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1}\right) - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right) = \left(H_{2n} - \dfrac{1}{2}H_n\right) - \dfrac{1}{2}H_n = H_{2n} - H_n$, d'où le développement asymptotique

$$S_{2n} = \big(\ln(2n) + \gamma + o(1)\big) - \big(\ln(n) + \gamma + o(1)\big) = \ln(2) + o(1) \ ,$$

soit $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \ln(2)$. Comme $S_{2n+1} = S_{2n} + \dfrac{1}{2n+1}$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \ln(2)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)$, soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

b. Notons u_k le k-ème terme de cette série, ainsi $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{1}{3}$, $u_3 = -\dfrac{1}{4}$, $u_4 = \dfrac{1}{5}$, etc. et posons $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ la somme partielle d'ordre n. Ainsi,

$$U_{3n} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1}\right) - \frac{1}{2n} .$$

On a alors $U_{3n} = \left(1 + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{4n-1}\right) - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right) = \left(H_{4n} - \dfrac{1}{2}H_{2n}\right) - \dfrac{1}{2}H_n$, donc

$$U_{3n} = \ln(4n) + \gamma - \frac{1}{2}\big(\ln(2n) + \gamma + \ln(n) + \gamma\big) + o(1) = \frac{3}{2}\ln(2) + o(1) .$$

Comme en **b.**, c'est-à-dire en justifiant que les suites extraites (U_{3n+1}) et (U_{3n+2}) ont la même limite, on conclut que la somme de la série proposée est $U = \dfrac{3}{2}\ln(2)$.

c. La somme partielle d'ordre $n(p+q)$ est constituée de la somme des inverses des np premiers entiers naturels impairs, à laquelle on retranche la somme des inverses des nq premiers entiers naturels (non nuls) pairs. Cela s'écrit

$$\begin{aligned}
V_{n(p+q)} &= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2np-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2nq}\right) \\
&= \left(H_{2np} - \frac{1}{2}H_{np}\right) - \frac{1}{2}H_{nq} \\
&= \ln(2np) + \gamma - \frac{1}{2}\ln(np) - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\ln(nq) - \frac{1}{2}\gamma + o(1) ,
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_{n(p+q)} = \ln(2) + \dfrac{1}{2}\big(\ln(p) - \ln(q)\big)$. Le terme général de la série tendant vers zéro, cette dernière a pour somme $V = \ln(2) + \dfrac{1}{2}\big(\ln(p) - \ln(q)\big) = \ln\left(2\sqrt{\dfrac{p}{q}}\right)$.

27*. Soit $\sum a_n$ une série de nombres complexes, absolument convergente. Soit σ une permutation de l'ensemble des entiers naturels, c'est-à-dire une bijection de $\mathbb{N}$ sur lui-même. Montrer que la série $\sum a_{\sigma(n)}$ converge, et prouver l'égalité des sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

- -

• Soit N entier naturel, posons $M_N = \max\big\{\sigma(0), \sigma(1), \cdots, \sigma(N)\big\}$. On a alors

$$\sum_{n=0}^{N} \left|a_{\sigma(n)}\right| \leq \sum_{k=0}^{M_N} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| ,$$

ainsi $\sum \left|a_{\sigma(n)}\right|$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées, ce qui prouve la convergence (absolue) de la série $\sum a_{\sigma(n)}$.

• Posons maintenant $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe un rang K pour lequel $\sum_{k=K+1}^{+\infty} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Si E est une partie finie de l'intervalle $[\![K+1, +\infty[\![$, alors

$$\Big|\sum_{k\in E} a_k\Big| \leq \sum_{k\in E} |a_k| \leq \sum_{k=K+1}^{+\infty} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Posons $N = \max\left\{\sigma^{-1}(0), \cdots, \sigma^{-1}(K)\right\}$. Si $n > N$, alors $\sigma(n) \notin [\![0, K]\!]$, donc $\sigma(n) \geq K+1$. Si enfin N' est un entier strictement plus grand que N, alors la somme $\sum_{n=0}^{N'} a_{\sigma(n)}$ contient les termes a_0, $\cdots$, a_K et on peut donc écrire $\sum_{n=0}^{N'} a_{\sigma(n)} = \sum_{k=0}^{K} a_k + \sum_{k\in E} a_k$, où E est une partie finie de $[\![K+1, +\infty[\![$. Alors, par inégalités triangulaires,

$$\begin{aligned}
\Big|S - \sum_{n=0}^{N'} a_{\sigma(n)}\Big| &= \Big|S - \sum_{k=0}^{K} a_k - \sum_{k\in E} a_k\Big| \\
&\leq \Big|S - \sum_{k=0}^{K} a_k\Big| + \Big|\sum_{k\in E} a_k\Big| \\
&\leq \sum_{k=K+1}^{+\infty} |a_k| + \Big|\sum_{k\in E} a_k\Big| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .
\end{aligned}$$

Les sommes partielles de la série $\sum a_{\sigma(n)}$ convergent aussi vers S, ce qu'il fallait démontrer.

---

28. Soit (a_n) une suite de réels **non nuls**. On dit que "le **produit infini** $\prod a_n$ converge" si la suite (P_n) définie par $P_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$ admet une limite réelle **non nulle**. Dans ce cas, on note alors $\prod_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} P_n$.

a. Calculer, après avoir justifié leur existence, les produits infinis

$$P = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) \qquad ; \qquad Q = \prod_{k=2}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\ .$$

b. Soit (u_n) une suite de réels positifs. Montrer que le produit infini $\prod(1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2n}$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge, mais que le produit infini $\prod(1+u_n)$ converge.

- -

a. Posons $a_k = 1 + \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$. Calculons d'abord les "**produits partiels**" d'indices pairs, ce qui permet de regrouper les facteurs deux par deux (et silence dans les rangs, merci!) :

$$\begin{aligned} P_{2n} &= \left[(1+1)\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] \times \left[\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\right] \times \cdots \times \left[\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right] \\ &= \left[\frac{2}{1} \times \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{4}{3} \times \frac{3}{4}\right] \times \cdots \times \left[\frac{2n}{2n-1} \times \frac{2n-1}{2n}\right] \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

On peut formaliser un peu plus ce calcul :

$$P_{2n} = \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)\left(1-\frac{1}{2k}\right)\right] = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{2k-1} \times \frac{2k-1}{2k}\right) = \prod_{k=1}^{n} 1 = 1\,.$$

Par ailleurs, $P_{2n+1} = a_{2n+1}\, P_{2n} = \dfrac{2n+2}{2n+1}$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} P_{2n+1} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 1$: le produit infini $\prod\limits_{k\geq 1} a_k$ converge et $P = \prod\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = 1$.

Rappelons en effet qu'une suite (u_n) telle que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite l converge elle aussi vers l.

- On recommence en posant $b_k = 1 - \dfrac{1}{k^2}$ et en notant Q_n le produit partiel d'ordre n :

$$Q_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\left(\prod\limits_{k=2}^{n}(k-1)\right)\left(\prod\limits_{k=2}^{n}(k+1)\right)}{\left(\prod\limits_{k=2}^{n} k\right)^2}\,.$$

Donc $Q_n = \dfrac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n-1} k\right)\left(\prod\limits_{k=3}^{n+1} k\right)}{\left(\prod\limits_{k=2}^{n} k\right)^2} = \dfrac{1 \times 2 \times n \times (n+1)}{2^2 \times n^2} = \dfrac{n+1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

Le produit infini $\prod\limits_{k\geq 2} b_k$ est donc convergent, et $Q = \prod\limits_{k=2}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

b. • Si la série $\sum_n u_n$ converge, alors la suite (u_n) tend vers zéro et on a alors l'équivalence $\ln(1+u_n) \sim u_n$; la série $\sum_n \ln(1+u_n)$ converge donc (comparaison de séries à termes positifs), notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+u_n)$ sa somme. Alors

$$P_n := \prod_{k=0}^{n}(1+u_k) = \exp\Big(\sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^S \in \mathbb{R}_+^* \ ,$$

donc le produit infini $\prod_n (1+u_n)$ est convergent.

• Si, par contre, la série $\sum_n u_n$ diverge, il en est de même de la série $\sum_n \ln(1+u_n)$ (*en effet, si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$*, on a toujours l'équivalence* $\ln(1+u_n) \sim u_n$ *et le critère des équivalents permet de conclure, et si* (u_n)*ne tend pas vers zéro, alors la suite* $\big(\ln(1+u_n)\big)$ *ne tend pas non plus vers zéro et les deux séries sont grossièrement divergentes*); les sommes partielles S_n de cette dernière série tendent alors vers $+\infty$ (*série divergente à termes positifs*), donc $P_n = e^{S_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et le produit infini $\prod_n (1+u_n)$ est divergent.

c. • La série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (*critère spécial des séries alternées*), et la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{2n}$ diverge, donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

• Développons $\ln(1+u_n)$:

$$\ln(1+u_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big) \ ,$$

donc la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge (*somme de deux séries convergentes*). Si on note S sa somme, alors les produits partiels $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$ tendent vers le réel strictement positif e^S, donc le produit infini $\prod_{n\geq 1}(1+u_n)$ est convergent. *Cela montre que le résultat du* **b.** *n'est plus valable si l'on supprime l'hypothèse* $u_n \geq 0$.

---

29. Soit $P_n = \prod_{k=2}^{n}\Big(1 + \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\Big)$ pour $n \geq 2$.

a. Montrer qu'il existe un réel α tel que $\ln(P_n) = -\dfrac{1}{2}\ln(n) + \alpha + o(1)$.

b. En déduire que $P_n \sim \dfrac{K}{\sqrt{n}}$, avec $K > 0$.

- -

a. On a $\ln(P_n) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\Big(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\Big) = \sum_{k=2}^{n} \Big(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + r_k\Big)$, avec $r_k = O\Big(\dfrac{1}{k^{3/2}}\Big)$.

La série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ est convergente, par le critère des séries alternées, notons S sa somme.

La série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} r_k$ est (absolument) convergente, notons R sa somme.

Par ailleurs, on connaît le développement asymptotique $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

De tout cela, on déduit le développement

$$\ln(P_n) = \big(S + o(1)\big) - \frac{1}{2}\,\big(\ln(n) + \gamma - 1 + o(1)\big) + \big(R + o(1)\big) = -\frac{1}{2}\ln(n) + \alpha + o(1)$$

avec $\alpha = S + R - \dfrac{1}{2}(\gamma - 1)$.

b. Immédiatement, $P_n = e^{\ln(P_n)} = \dfrac{e^\alpha}{\sqrt{n}}\, e^{o(1)}$, le facteur $e^{o(1)}$ est l'exponentielle d'une expression tendant vers 0, il tend donc vers 1 et peut se mettre sous la forme $1 + o(1)$. Il reste donc, en posant $K = e^\alpha > 0$:

$$P_n = \frac{K}{\sqrt{n}}\,\big(1 + o(1)\big)\ , \qquad \text{i.e.} \qquad P_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}\ .$$

Exercices avec Python.

30. On rappelle le développement asymptotique $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note n_p le plus petit entier naturel n pour lequel $H_n \geq p$:

$$n_p = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid H_n \geq p\}\ .$$

a. Justifier l'existence de n_p et montrer que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} n_p = +\infty$.

b. En utilisant Python, faire afficher les valeurs de n_p inférieures à 10^6, ainsi que leurs logarithmes.

c. En utilisant le développement asymptotique donné en préambule, montrer que

$$\ln(n_p) = p - \gamma + o(1)\ .$$

d. Comparer le résultat du **c.** avec les valeurs expérimentales. En déduire une valeur approchée de la constante d'Euler γ.

e. Déduire du **c.** la limite de $\dfrac{n_{p+1}}{n_p}$, puis vérifier expérimentalement.

- -

a. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ (sommes partielles d'une série divergente à termes positifs), pour tout p entier naturel non nul, l'ensemble $A_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid H_n \geq p\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide, donc il admet un plus petit élément, d'où l'existence de $n_p = \min(A_p)$.

On a $H_n \leq \sum_{k=1}^{n} 1 = n$, en particulier $H_{n_p} \leq n_p$, et comme $n_p \in A_p$, on a aussi $H_{n_p} \geq p$, donc par transitivité $n_p \geq p$, ce qui entraîne $\lim_{p\to+\infty} n_p = +\infty$.

b. *cf.* script.

c. On a $H_{n_p} \geq p$, mais aussi $H_{n_p-1} < p$, donc $H_{n_p} = H_{n_p-1} + \dfrac{1}{n_p} < p + \dfrac{1}{n_p}$. Comme $\lim_{p\to+\infty} n_p = +\infty$, on a donc $\lim_{p\to+\infty} \dfrac{1}{n_p} = 0$, d'où l'on déduit que $H_{n_p} = p + o(1)$ lorsque $p \to +\infty$. Par ailleurs, $H_{n_p} = \ln(n_p) + \gamma + o(1)$. En comparant ces deux développements asymptotiques, on obtient $\ln(n_p) = p - \gamma + o(1)$.

d. On a donc $\gamma = \lim_{p\to+\infty} \big(p - \ln(n_p)\big)$. Le script joint fait donc afficher les valeurs successives de $p - \ln(n_p)$. On obtient γ voisin de 0,577215.

e. On a

$$\ln\left(\frac{n_{p+1}}{n_p}\right) = \ln(n_{p+1}) - \ln(n_p) = \big(p + 1 - \gamma + o(1)\big) - \big(p - \gamma + o(1)\big) = 1 + o(1)\ ,$$

donc $\lim_{p\to+\infty} \dfrac{n_{p+1}}{n_p} = e$. Le script joint affiche les valeurs successives de $\dfrac{n_{p+1}}{n_p}$.

---

31. On étudie la série $\sum_{k\geq 1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

a. Quelle est sa nature ?

b. On note S la somme de la série, et on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ ses sommes partielles. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$.

c. Avec Python, trouver n tel que $S_n \leq S \leq S_n + 10^{-4}$.

d. Représenter les points de coordonnées (n, S_n) pour $n \leq 200$.

e. On permute les termes: $T_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{6}} - \dfrac{1}{\sqrt{8}} + \cdots$ (n termes), en alternant un terme positif, deux termes négatifs, dans l'ordre. Représenter les points (n, T_n) avec $n \leq 200$.

f. Même question avec deux termes positifs puis un négatif.