CORRIGÉ du DM de MATHÉMATIQUES numéro 1
PSI2 2024-2025

PROBLÈME 1

Partie 1. Erreur dans le calcul approché d'une intégrale par la méthode des trapèzes

a. Le système linéaire permettant d'obtenir les coefficients α (coefficient directeur) et β (ordonnée à l'origine) est $\begin{cases} a\ \alpha + \beta = f(a) \\ b\ \alpha + \beta = f(b) \end{cases}$. Son déterminant est $\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} = a - b \neq 0$, il admet donc une unique solution. Le détail du calcul est sans intérêt, mais il est utile (et même indispensable!) de savoir que l'on peut mettre φ sous la forme

$$\varphi(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\ .$$

b. Commençons par l'interprétation graphique, facile si les réels $f(a)$ et $f(b)$ sont positifs : dans ce cas, considérons les points $A\ (a, 0)$, $B\ (b, 0)$, $A'\ \big(a, f(a)\big)$ et $B'\ \big(b, f(b)\big)$. La courbe représentative de la fonction affine φ sur $[a, b]$ n'est autre que le segment de droite $[A'B']$, et l'intégrale de φ sur $[a, b]$ est alors l'aire du trapèze $ABB'A'$, qui vaut $\dfrac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$: "la moyenne des deux bases, fois la hauteur", la "hauteur" devant ici être comprise comme la distance entre les deux côtés parallèles, soit $b - a$. *Si les réels $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas tous deux positifs, il faudrait introduire une notion d'"aire algébrique" pour généraliser.*

Pour faire une démonstration rigoureuse, notons que l'expression de la fonction affine φ est $\varphi(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) + f(a)$ donc, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_{[a,b]} \varphi = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \int_a^b (x - a)\,\mathrm{d}x + f(a) \int_a^b \mathrm{d}x = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,\frac{(b-a)^2}{2} + f(a)(b - a) = \frac{b - a}{2}\big(f(a) + f(b)\big) = T\ .$$

c. La fonction f'' est continue sur le segment $[a, b]$, donc est bornée (et, plus précisément, présente un minimum et un maximum). C'est une façon de comprendre un théorème du cours qui dit que "**l'image d'un segment par une fonction continue est un segment**".

d. La fonction φ est affine, donc $\varphi'' = 0$. On a alors $g''(x) = f''(x) - m$, donc $g'' \geq 0$ sur $[a, b]$, on en déduit que g est convexe sur $[a, b]$. Le graphe de la fonction g sur $[a, b]$ est alors situé en-dessous de la sécante joignant les points d'abscisses a et b. Comme $g(a) = g(b) = 0$, le graphe de g sur $[a, b]$ est en-dessous de l'axe des abscisses, i.e. $g \leq 0$ sur $[a, b]$.

e. De façon analogue, $h''(x) = f''(x) - M \leq 0$ et $h(a) = h(b) = 0$. Donc h est concave sur $[a, b]$ et son graphe est situé au-dessus de la sécante qui n'est autre que l'axe des abscisses, donc $h \geq 0$ sur $[a, b]$.

f. Des questions **d.** et **e.** ci-dessus, on déduit que

$$\forall x \in [a, b] \qquad -\frac{M}{2}\,(x - a)(b - x) \leq f(x) - \varphi(x) \leq -\frac{m}{2}\,(x - a)(b - x)$$

(*on a obtenu un encadrement de l'erreur ponctuelle que l'on commet en pratiquant une interpolation linéaire sur le segment $[a, b]$, c'est-à-dire en remplaçant l'arc de courbe par sa "corde" ou "sécante"*). En intégrant ces inégalités, on obtient

$$-\frac{M}{2} \int_a^b (x - a)(b - x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \big(f(x) - \varphi(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq -\frac{m}{2} \int_a^b (x - a)(b - x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

ce qui est l'encadrement demandé par l'énoncé.

Partie 2. Étude de deux suites adjacentes

a. $\displaystyle\int_n^{n+1} \ln x\,\mathrm{d}x = \big[x\,\ln x - x\big]_n^{n+1} = (n + 1)\,\ln(n + 1) - n\,\ln n - 1.$

b. En posant $f(x) = \ln x$ sur $[n, n+1]$, on a $-\dfrac{1}{n^2} \leq f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \leq -\dfrac{1}{(n+1)^2}$ et le résultat de la question **1.f.** donne

$$\frac{1}{12(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \ln x \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\,\big[\ln n + \ln(n+1)\big] \leq \frac{1}{12n^2}\ ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{12(n+1)^2} \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)\,\big[\ln(n+1) - \ln n\big] - 1 \leq \frac{1}{12n^2}\ .$$

c. Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} (V_n - U_n) = 0$. On obtient par ailleurs

$$U_{n+1} - U_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\,\big[\ln(n+1) - \ln n\big] - 1$$

et cette expression est positive d'après la question **b.**, donc la suite (U_n) est croissante.

Enfin, $V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - U_n + \dfrac{1}{12n} - \dfrac{1}{12(n-1)} \leq U_{n+1} - U_n - \dfrac{1}{12n^2}$, quantité négative d'après **b.**, donc (V_n) est décroissante. Les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes, donc elles admettent une limite commune C.

Partie 3. Intégrales de Wallis

a. On calcule $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

b. Pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \sin x \leq 1$, donc $(\sin x)^{n+1} \leq (\sin x)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par intégration de cette inégalité sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on obtient $I_{n+1} \leq I_n$: la suite (I_n) est décroissante.

c. On écrit $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\, \sin x \,\mathrm{d}x$ et on intègre par parties :

$$I_{n+2} = \big[-\cos x\, \sin^{n+1} x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, \cos^2 x \,\mathrm{d}x = (n+1)\,(I_n - I_{n+2})\ ,$$

donc $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, I_n$. Cette relation permet de calculer tous les I_{2p} à partir de I_0, et tous les I_{2p+1} à partir de I_1. Par exemple,

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p}\, I_{2p-2} = \frac{(2p-1)\times(2p-3)}{(2p)\times(2p-2)}\, I_{2p-4} = \cdots = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)}\, I_0\ .$$

En remultipliant numérateur et dénominateur par $2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p) = 2^p\, p!$, on obtient bien $I_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}$. Par un calcul analogue, on trouve $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Partie 4. Formule de Wallis et équivalent de Stirling

a. La relation $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$ s'écrit $\dfrac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n+1)!} \leq \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} \leq \dfrac{2^{2n-2}\,\big((n-1)!\big)^2}{(2n-1)!}$.

En multipliant tout par $\dfrac{(2n+1)!}{2^{2n}\,(n!)^2}$, on obtient

$$1 \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{(2n+1)\times\big((2n)!\big)^2}{2^{4n}\,(n!)^4} \leq \frac{2n+1}{2n}\ .$$

Le théorème d'encadrement indique alors que le terme du milieu tend vers 1.

Comme $2n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi \dfrac{n\left((2n)!\right)^2}{2^{4n}\,(n!)^4} = 1$, ce qui donne la formule de Wallis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n)!\,\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$ en prenant la racine carrée puis l'inverse.

b. De $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = C$, on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = e^C$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} X_{2n} = e^C$ aussi puisque (X_{2n}) est une suite extraite de (X_n), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n = \dfrac{e^C}{e^{2C}} = e^{-C}$. Mais on a, par ailleurs, $Y_n = \sqrt{2}\,\dfrac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n)!\,\sqrt{n}}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n = \sqrt{2\pi}$ par la formule de Wallis.

Finalement, $e^{-C} = \sqrt{2\pi}$, d'où $C = -\ln\left(\sqrt{2\pi}\right) = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^n\,\sqrt{n}\,e^{-n}}{n!} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, ce qui peut s'écrire sous la forme

$$n! \sim \sqrt{2\pi\,n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (\textbf{formule de Stirling})\ .$$

PROBLÈME 2

1.a. C'est une application directe du théorème spécial des séries alternées.

b. Pour tout n entier naturel, r_n est du signe de u_{n+1}, donc de $(-1)^n$, donc $|r_n| = (-1)^n\,r_n$, ou encore $r_n = (-1)^n|r_n|$ donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|r_{n-1}| + |r_n| = (-1)^{n-1} r_{n-1} + (-1)^n r_n = (-1)^{n-1}\,(r_{n-1} - r_n) = (-1)^{n-1}\,u_n = v_n\ .$$

2.a. De $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$. D'autre part, la condition $v_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(v_n + v_{n+2})$ peut aussi s'écrire $v_{n+1} - v_{n+2} \leq v_n - v_{n+1}$, soit $V_{n+1} \leq V_n$: la suite (V_n) est décroissante. Il résulte alors du théorème spécial des séries alternées que la série de terme général $U_n = (-1)^{n-1}\,V_n$ est convergente.

Remarque. On peut aussi noter que $U_n = (-1)^{n-1} v_n + (-1)^n\,v_{n+1} = u_n + u_{n+1}$, ce qui assure la convergence de la série $\sum\limits_n U_n$ (somme de deux séries convergentes) ; on en déduit alors directement la relation concernant les restes $R_n = r_n + r_{n+1}$ de la question **2.c.** Mais cela ne dispense pas de vérifier que les hypothèses du critère spécial des séries alternées sont satisfaites, pour les questions **2.b.**, **2.d.** et **2.e.**

b. Toujours du théorème spécial, on déduit alors que R_n est du signe de U_{n+1}, donc de $(-1)^n$.

c. On écrit

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\,V_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\,(v_k - v_{k+1}) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} v_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_{k+1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k-1}v_k + \sum_{k=n+2}^{+\infty}(-1)^{k-1}v_k = r_n + r_{n+1} .$$

Les sommations jusqu'à l'infini sont justifiées car on sait que toutes les séries entrant en jeu sont convergentes.

d. Connaissant les signes des restes r_n et R_n, en multipliant par $(-1)^n$, on obtient

$$(-1)^n R_n = (-1)^n r_n - (-1)^{n+1} r_{n+1} , \qquad \text{soit} \qquad |r_n| - |r_{n+1}| = |R_n| \geq 0 .$$

La suite de terme général $|r_n|$ est donc décroissante.

e. En utilisant la décroissance de la suite $\big(|r_n|\big)$ et la question **1.b.**, on obtient

$$v_{n+1} = |r_n| + |r_{n+1}| \leq 2\,|r_n| = |r_n| + |r_n| \leq |r_{n-1}| + |r_n| = v_n ,$$

donc $\dfrac{v_{n+1}}{2} \leq |r_n| \leq \dfrac{v_n}{2}$. Par ailleurs, on a l'hypothèse que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1$, donc $v_{n+1} \sim v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$ et, par encadrement, on déduit donc $|r_n| \sim \dfrac{v_n}{2}$.

Enfin, $r_n = (-1)^n |r_n|$ d'après l'étude du signe, donc $r_n \sim (-1)^n \dfrac{v_n}{2}$, soit encore $r_n \sim -\dfrac{u_n}{2}$.

3. Applications.

a. La fonction $g = \ln \circ f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $g' = \dfrac{f'}{f}$. En appliquant l'égalité des accroissements finis à g sur le segment $[n, n+1]$, on obtient l'existence d'un réel $c_n \in]n, n+1[$ tel que $g(n+1) - g(n) = \big((n+1) - n\big)\, g'(c_n)$, c'est ce qu'il fallait démontrer.

b. De l'encadrement $n \leq c_n \leq n+1$, on tire $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = 0$ par hypothèse, on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f'(c_n)}{f(c_n)} = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \big[\ln f(n+1) - \ln f(n)\big] = 0$, et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(n+1)}{f(n)} = 1$ en prenant l'exponentielle (qui est une fonction continue).

c. Il est clair que (v_n) est une suite de réels strictement positifs, décroissante et tendant vers zéro. La question **3.b.** ci-dessus montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1$. Enfin,

$$v_{n+1} = f(n+1) = f\Big(\frac{n + (n+2)}{2}\Big) \leq \frac{f(n) + f(n+2)}{2} = \frac{1}{2}\,(v_n + v_{n+2})$$

puisque f est convexe. Toutes les hypothèses du problème sont donc vérifiées, on en déduit que $r_n \sim (-1)^n \dfrac{v_n}{2} = \dfrac{(-1)^n}{2}\, f(n)$.

d. Avec $\alpha > 0$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, décroissante, dérivable, convexe puisqu'elle est deux fois dérivable avec $f''(x) = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{x^{\alpha+2}}$ positive, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\dfrac{\alpha}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Toutes les hypothèses de la question précédente sont donc vérifiées. On en déduit un équivalent du reste d'ordre n de la série de Riemann alternée d'exposant α :

$$r_n \sim \frac{(-1)^n}{2\,n^\alpha}\ .$$

PROBLÈME 3

1. La linéarité des applications L_i et C_j est immédiate.

E est non vide ($0_n \in E$) et, si A et B sont deux matrices appartenant à E et λ et μ deux réels, les réels $L_i(A)$ et $C_j(A)$ sont tous égaux (notons $\delta(A)$ leur valeur commune), les réels $L_i(B)$ et $C_j(B)$ sont tous égaux (notons $\delta(B)$ leur valeur commune). La linéarité des applications L_i et C_j implique alors que les réels $L_i(\lambda A+\mu B)$ et $C_j(\lambda A+\mu B)$ ont tous pour valeur commune $\lambda\delta(A)+\mu\delta(B)$. Il en résulte que $\lambda A+\mu B \in E$: E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que $\delta(\lambda A+\mu B)=\lambda\delta(A)+\mu\delta(B)$: δ est une forme linéaire sur E.

2. Le lecteur vérifiera que

$$AJ=\begin{pmatrix} L_1(A) & L_1(A) & \dots & L_1(A)\\ L_2(A) & L_2(A) & \dots & L_2(A)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ L_n(A) & L_n(A) & \dots & L_n(A)\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad JA=\begin{pmatrix} C_1(A) & C_2(A) & \dots & C_n(A)\\ C_1(A) & C_2(A) & \dots & C_n(A)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ C_1(A) & C_2(A) & \dots & C_n(A)\end{pmatrix}\ :$$

le coefficient d'indices (i,j) de la matrice AJ est $L_i(A)$, celui de la matrice JA est $C_j(A)$.

Si $A\in E$, alors $AJ=JA=\delta(A)\,J$.

Réciproquement, si $AJ=JA$, on a $\forall i\,\forall j\quad L_i(A)=C_j(A)$, donc $A\in E$.

On a donc prouvé que $A\in E$ si et seulement si les matrices A et J commutent.

3. Si A et B appartiennent à E, on a $AJ=JA$ et $BJ=JB$, d'où

$$(AB)J=A(BJ)=A(JB)=(AJ)B=(JA)B=J(AB)\ ,$$

donc $AB\in E$. L'ensemble E est stable par produit matriciel.

Si A et B appartiennent à E, on a $(AB)J=\delta(AB)\,J$, mais aussi

$$(AB)J=A(BJ)=A\big(\delta(B)\,J\big)=\delta(B)\,(AJ)=\delta(B)\delta(A)\,J\ ,$$

d'où $\delta(AB)=\delta(A)\delta(B)$.

4. Si $A\in E$, supposée inversible, vérifiait $\delta(A)=0$, alors on aurait $AJ=\delta(A)\,J=0$ d'où $J=A^{-1}(AJ)=0$, ce qui est absurde : une matrice A de E inversible vérifie donc $\delta(A)\neq 0$.

Si $A\in E$ est inversible, on a $AJ=JA$, d'où $J=A^{-1}JA$, puis $JA^{-1}=A^{-1}J$, ce qui signifie que $A^{-1}\in E$. De plus, d'après la question **3.**, on a $\delta(A)\,\delta\big(A^{-1}\big)=\delta(I_n)=1$, donc $\delta\big(A^{-1}\big)=\dfrac{1}{\delta(A)}$.

5. M appartient à E car A et J sont dans E et E est un sous-espace vectoriel. On a

$$\delta(M)=\delta(A)-\frac{\delta(A)}{n}\,\delta(J)=0\ ,\quad \text{donc}\qquad M\in F=\mathrm{Ker}(\delta)\ .$$

F et G sont bien des sous-espaces vectoriels de E ;

• pour tout $A \in E$, on peut écrire $A = \left(A - \dfrac{\delta(A)}{n}\,J\right) + \left(\dfrac{\delta(A)}{n}\,J\right)$ et A est somme d'une matrice appartenant à F et d'une matrice appartenant à G : on a donc $E = F + G$;

• de $J \notin F$, on déduit facilement que $F \cap G = \{0\}$.

On a donc $E = F \oplus G$.

6. Le système à écrire est $\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ d+e+f &= 0 \\ g+h+i &= 0 \\ a+d+g &= 0 \\ b+e+h &= 0 \\ c+f+i &= 0 \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} d &= -e-f \\ g &= -h-i \\ b &= -e-h \\ c &= -f-i \\ a &= e+h+f+i \end{cases}$.

Si $A \in F$, on peut donc écrire

$$A = \begin{pmatrix} e+f+h+i & -e-h & -f-i \\ -e-f & e & f \\ -h-i & h & i \end{pmatrix} = eU + fV + hW + iX\ .$$

Il en résulte que $F \subset \mathrm{Vect}(U,V,W,X)$, l'autre inclusion étant immédiate. La famille (U,V,W,X) étant libre (*vérification immédiate*), elle forme une base de F, d'où $\dim F = 4$.

Enfin, $E = F \oplus G$ avec $\dim G = 1$, donc $\dim E = 5$ et une base de E est la famille de matrices (U,V,W,X,J).

7.a. • Les matrices $T_{r,s} = E_{1,1} + E_{r,s} - E_{1,s} - E_{r,1}$ appartiennent toutes à F (vérification immédiate).

• La famille $\mathcal{T}$ est libre : si une combinaison linéaire $\displaystyle\sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} \lambda_{r,s}T_{r,s}$ est nulle, alors, pour tout couple $(r_0,s_0) \in [\![2,n]\!]^2$, le coefficient d'indices (r_0,s_0) de cette combinaison linéaire est λ_{r_0,s_0} et ce coefficient est donc nul.

• La famille $\mathcal{T}$ engendre F : si $A = (a_{i,j}) \in F$, il est facile de vérifier que $A = \displaystyle\sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} a_{r,s}T_{r,s}$ (la vérification de cette identité est évidente pour chaque coefficient $a_{i,j}$ avec $i \geq 2$ et $j \geq 2$; enfin, le fait que A appartienne à F entraîne que $a_{i,1} = -\displaystyle\sum_{j=2}^{n} a_{i,j}$ $(2 \leq i \leq n)$, que $a_{1,j} = -\displaystyle\sum_{i=2}^{n} a_{i,j}$ $(2 \leq j \leq n)$ et enfin que $a_{1,1} = \displaystyle\sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} a_{r,s}$).

b. On a donc $\dim F = \mathrm{Card}\left([\![2,n]\!]^2\right) = (n-1)^2$ puis, comme $E = F \oplus G$ où G est une droite vectorielle, $\dim E = (n-1)^2 + 1$.