Rolle, accroissements finis

1. Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$, de degrés p et q respectivement. Soient a et b deux réels distincts. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = P(x)\, e^{ax} + Q(x)\, e^{bx} \ .$$

Montrer que l'ensemble $Z(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ est de cardinal fini, au plus égal à $p+q+1$. *Considérer* $g(x) = f(x)\, e^{-bx}$ *et utiliser le théorème de Rolle.*

2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable (I intervalle de $\mathbb{R}$). Soient A et B deux points de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f, tels que B soit sur la tangente à $\mathcal{C}$ au point A. Montrer qu'il existe un point M de $\mathcal{C}$, distinct de A, tel que la tangente à $\mathcal{C}$ au point M passe par A.

Fonctions convexes

3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient x, y, z dans I, avec $x < y < z$.

a. Comparer les taux d'accroissement $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ et $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$.

b. Quel est le signe du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} \ ?$$

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, croissante. Montrer que
- soit f est constante sur $\mathbb{R}$,
- soit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable.

a. Montrer que $\forall m \in I \ \ \forall x \in I \quad f(m) \leq f(x) + (m-x)\, f'(m)$.

b. En déduire que, si $x_1, \cdots, x_n$ sont des éléments de I, alors

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \ .$$

c. En utilisant le **b.**, montrer que, si $x_1, \cdots, x_n$ sont des réels strictement positifs, alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2 \ .$$

d. Toujours avec $x_1, \cdots, x_n$ réels strictement positifs, montrer que

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \ .$$

Formules de Taylor

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$.

a. Montrer que la suite (s_n) est bornée.

b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n$.

c*. En utilisant un développement limité de $x \mapsto \sin^2 x$ au voisinage de 0, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} t_n$.

7*. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f est à valeurs positives ou nulles, et que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |f''(x)| \leq M \ .$$

Démontrer l'inégalité $\quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |f'(x)| \leq \sqrt{2\, M\, f(x)}$. *On pourra fixer un point a et utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange entre a et x pour majorer $f(x)$.*

Intégration des fonctions continues sur un segment

8. En considérant des sommes de Riemann, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(2n)!}{n!\, n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

9. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t+1}\, \mathrm{d}t$ est positive.

10. Soient a et b deux réels avec $a < b$. On note F l'ensemble des fonctions continues sur $I = [a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $f \in F$, on pose $P_f = \displaystyle\left(\int_I f\right)\left(\int_I \frac{1}{f}\right)$.

a. Déterminer le réel $m = \displaystyle\inf_{f\in F} P_f$.

b. Quelles sont les fonctions f de F telles que $P_f = m$?

c. L'ensemble $\{P_f \ ; \ f \in F\}$ est-il majoré ?

11. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$, $f' > 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que, pour tout $a \geq 0$, on a

$$a\, f(a) = \int_0^a f(t)\, \mathrm{d}t + \int_0^{f(a)} f^{-1}(t)\, \mathrm{d}t \ .$$

En déduire que, pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$, on a l'inégalité

$$ab \leq \int_0^a f(t)\, \mathrm{d}t + \int_0^b f^{-1}(t)\, \mathrm{d}t \ .$$

12. Étude et représentation graphique de la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1} F(x)$.

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit le polynôme $A_n = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\big[(X^2-1)^n\big]$. À l'aide d'une intégration par parties itérée, montrer que, si P est un polynôme de degré strictement inférieur à n, on a

$$\int_{-1}^1 P(x)\, A_n(x)\, \mathrm{d}x = 0 \ .$$

En déduire que, si m et n sont deux entiers naturels distincts, alors $\displaystyle\int_{-1}^1 A_m(x) A_n(x) \mathrm{d}x = 0$.

Intégrales généralisées, fonctions intégrables.

14. Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^\alpha \,\mathrm{d}x$ avec α réel ;

b. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^\alpha\,(\cos x)^\beta \,\mathrm{d}x$ avec α et β réels.

15. Quelle est la nature des intégrales généralisées suivantes ?

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \;;\quad I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{(1-t)^3}}\,\mathrm{d}t \;;\quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{e^t-1} \;;\quad I_4 = \int_0^{+\infty} e^{-(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

16. Convergence et calcul des intégrales généralisées suivantes:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)} \;;\; I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(e^t+1)(e^{-t}+1)} \;;\; I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t \;;\; I_4 = \int_0^{+\infty} \ln\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\mathrm{d}t\ .$$

17. Convergence et calcul de l'intégrale $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n}\,\mathrm{d}x$, avec n entier naturel.

18. Convergence et calcul des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x} \quad;\quad J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} \quad;\quad K = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\ .$$

19. Convergence et calcul de l'intégrale $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,|\sin t|\,\mathrm{d}t$.

20. On pose $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que ces intégrales sont convergentes et que $I = J$.

b. Calculer $I + J$. En déduire I et J.

21. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue, telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ soit convergente. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

a. Pour $x > 0$, montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

b. En déduire convergence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$.

22. Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 2$.

a. Montrer la convergence de l'intégrale généralisée $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

b. Montrer les inégalités $\quad 0 \leq I_\alpha \leq \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

23.a. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ (*sinus cardinal*) n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, mais que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est semi-convergente.

b. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ et $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite (J_n) est constante, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (J_n - K_n) = 0$, et en déduire que $I = \dfrac{\pi}{2}$.

d. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

24. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue, bornée. On pose $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,f(x-t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et que $g'' = g - 2f$.

25. Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2+1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2+4}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer leurs intégrales sur $]0, +\infty[$ sans passer par un calcul de primitive.

26*. Existence et calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$.

27. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue, décroissante, et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

a. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,f(x) = 0$.

c*. Donner un exemple de fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, qui ne tend pas vers 0 à l'infini.

28. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f(0) = 0$. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t \leq 2 \int_0^x \frac{f(t)\,f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t\ ,$$

après avoir prouvé la convergence des intégrales considérées.