

# INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

## I. Fonctions continues par morceaux

### 1. Définition (sur un segment).

**Définition.** Soit  $S = [a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$ , une fonction  $f : S \rightarrow \mathbb{K}$  est dite **continue par morceaux** (en abrégé **c.p.m.**) s'il existe une subdivision  $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  de  $S$  telle que, pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , la restriction de  $f$  à l'intervalle ouvert  $]a_i, a_{i+1}[$  soit prolongeable en une fonction continue sur l'intervalle fermé  $[a_i, a_{i+1}]$ .

Rappelons qu'une subdivision de  $S = [a, b]$  est une liste  $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  de réels telle que

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b.$$

Une subdivision  $\sigma$  de  $S$  vérifiant les conditions de cette définition est dite **adaptée à  $f$** .

La définition ci-dessus peut sembler un peu alambiquée (des restrictions prolongeables, bouâr!), cela signifie (mais c'est plus long à écrire) que la fonction  $f$ :

- est continue sur chaque intervalle ouvert  $]a_i, a_{i+1}[$ ,  $0 \leq i \leq n-1$  ;
- admet une limite à gauche finie en chaque point  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  ;
- admet une limite à droite finie en chaque point  $a_i$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ .

Autrement dit, la fonction  $f$  admet sur le segment  $S$  un nombre fini de points de discontinuité, et ce sont des "discontinuités de première espèce" (*vocabulaire hors programme*), c'est-à-dire avec existence de limites à gauche et à droite finies.

**Remarque.** La limite à gauche de  $f$  en un point  $x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ , est souvent notée abusivement  $f(x_0^-)$ . De même pour la limite à droite, on note  $f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ .

**Exemple.** La fonction **partie entière**  $f : x \mapsto [x]$  est continue par morceaux sur tout segment de  $\mathbb{R}$ . Ses points de discontinuité sont les entiers relatifs (et, dans un segment de  $\mathbb{R}$ , il y en a un nombre fini), et pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , on a  $f(n^-) = n-1$  et  $f(n^+) = f(n) = n$ : la fonction partie entière est continue à droite en tout point.

**Exemple.** Plus généralement, les fonctions **en escalier** sur  $S$  sont c.p.m. sur  $S$ . Rappelons que  $f$  est en escalier sur  $S = [a, b]$  s'il existe une subdivision  $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$  de  $S$  telle que la restriction de  $f$  à chaque intervalle ouvert  $]a_i, a_{i+1}[$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , soit constante.

**Proposition.** Toute fonction continue par morceaux sur un segment de  $\mathbb{R}$  est bornée sur ce segment (mais, dans le cas des fonctions réelles, n'atteint pas nécessairement ses bornes).

*Preuve.* Soit  $S = [a, b]$ , soit  $f : S \rightarrow \mathbb{K}$  c.p.m., soit  $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$  une subdivision de  $S$  adaptée à  $f$ . Pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , notons  $f_i$  la restriction de  $f$  à l'intervalle ouvert  $]a_i, a_{i+1}[$ . Alors chaque  $f_i$  est bornée car prolongeable en une fonction continue  $\widehat{f}_i$  sur le segment  $[a_i, a_{i+1}]$ , il existe donc  $M_i \in \mathbb{R}_+$  tel que  $|f(x)| = |f_i(x)| \leq M_i$  sur  $]a_i, a_{i+1}[$ . Posons

$$M = \max \left\{ M_0, \dots, M_{n-1}, |f(a_0)|, \dots, |f(a_n)| \right\}.$$

On a bien  $\forall x \in S \quad |f(x)| \leq M$ .

Toutefois, la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = x$  si  $x \in [0, 1[$  et  $f(1) = 0$  est c.p.m. sur  $[0, 1]$ , mais sa borne supérieure 1 n'est pas atteinte.

**Proposition.** L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment  $S$  de  $\mathbb{R}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on le notera  $\mathcal{C}_m(S, \mathbb{K})$ . De plus, si  $f$  et  $g$  sont c.p.m. sur  $S$ , alors le produit  $fg$  l'est aussi.

## 2. Intégrale sur un segment d'une fonction c.p.m. réelle.

**a. Un lemme (hors programme).** Si  $f : S = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue par morceaux et si on se donne  $\varepsilon > 0$ , alors il existe deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  en escalier sur  $S$  telles que

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leq \varepsilon \quad \text{sur } S.$$

(*admis*). Ce lemme dit que toute fonction c.p.m. réelle peut être encadrée par deux fonctions en escalier, respectivement minorante et majorante, et que l'on peut "resserrer" autant que l'on veut la précision  $\varepsilon$  de cet encadrement. Ce lemme se démontre assez facilement avec la notion de continuité uniforme et le théorème de Heine (*programme MPSI-MP uniquement*).

### **b. Définition de l'intégrale (non exigible).**

On commence par définir l'intégrale d'une fonction en escalier: si  $f : S = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est en escalier, si  $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$  est une subdivision de  $S$  adaptée à  $f$  (i.e. telle que  $f$  garde une

valeur constante  $C_i$  sur chaque intervalle ouvert  $]a_i, a_{i+1}[$ ), on pose  $\int_S f = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) C_i$ ,

c'est une somme d'aires (algébriques) de rectangles. On admet que cette valeur ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à  $f$ .

Soit  $S = [a, b]$ , soit maintenant  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux.

On appelle **intégrale supérieure** de  $f$  et on note  $\mathcal{I}_+(f)$  la borne inférieure des intégrales des fonctions en escalier majorant  $f$  sur  $S$ . De même, on appelle **intégrale inférieure** de  $f$  et on note  $\mathcal{I}_-(f)$  la borne supérieure des intégrales des fonctions en escalier minorant  $f$  sur  $S$ . On a alors  $\mathcal{I}^+(f) = \mathcal{I}^-(f)$  et cette valeur commune est appelée **intégrale** de  $f$  sur  $S$  et notée  $\int_S f$ . L'existence de  $\mathcal{I}^+(f)$  et  $\mathcal{I}^-(f)$  résulte du caractère borné des fonctions continues par morceaux sur  $S$ , leur égalité résulte du lemme énoncé dans le paragraphe **a.**, je ne détaillerai pas plus.

### **c. Propriétés de l'intégrale.**

Dans tout ce paragraphe,  $S = [a, b]$  est un segment de  $\mathbb{R}$ .

**Linéarité.** L'application  $\mathcal{I} : \begin{cases} \mathcal{C}_m(S, \mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_S f \end{cases}$  est une forme linéaire sur le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{C}_m(S, \mathbb{R})$ .  
*admis.*

On a donc, pour  $f$  et  $g$  continues par morceaux et à valeurs réelles sur  $S$ , pour  $\lambda$  réel,

$$\int_S (\lambda f + g) = \lambda \int_S f + \int_S g.$$

**Positivité.** Soit  $f : S \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction c.p.m. positive, alors  $\int_S f \geq 0$ .  
*admis.*

**Croissance.** Soient  $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions c.p.m. telles que  $f \leq g$  sur  $S$ . On a alors  $\int_S f \leq \int_S g$ .

Preuve. Cela résulte de la linéarité et de la croissance. En effet, on a  $g - f \geq 0$  donc, par positivité,  $\int_S (g - f) \geq 0$  puis, par linéarité,  $\int_S g - \int_S f \geq 0$ , ce qu'il fallait prouver.

**Conséquence: inégalité de la moyenne.** Soit  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux. Si on a  $m \leq f(x) \leq M$  pour tout  $x \in S = [a, b]$ , alors  $m(b - a) \leq \int_S f \leq M(b - a)$ .

**Inégalité triangulaire intégrale.** Soit  $f \in \mathcal{C}_m(S, \mathbb{R})$ , on a alors  $\left| \int_S f \right| \leq \int_S |f|$ .

Preuve. On a  $-|f| \leq f \leq |f|$  donc, par croissance de l'intégrale (et linéarité pour la multiplication par le réel  $-1$ ):  $-\int_S |f| \leq \int_S f \leq \int_S |f|$ , et cet encadrement est équivalent à l'inégalité que l'on cherche à démontrer. On admettra que, si  $f$  est c.p.m., alors  $|f|$  aussi.

**Notations et extension.** Si  $S = [a, b]$  et  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  est c.p.m., l'intégrale de  $f$  sur  $S$  est notée  $\int_S f$  ou  $\int_{[a,b]} f$ , mais on pourra l'écrire aussi  $\int_a^b f$ , ou encore, en introduisant une "variable muette"  $\int_a^b f(x) dx$ . Cette dernière écriture sera généralisée de la façon suivante: si  $u$  et  $v$  sont deux réels appartenant à  $S$ , on posera

$$\int_u^v f(x) dx = \begin{cases} \int_{[u,v]} f & \text{si } u < v \\ 0 & \text{si } u = v \\ -\int_{[v,u]} f & \text{si } u > v \end{cases} .$$

Avec ces notations, si  $u, v, w$  sont trois points de  $S$ , on a la **relation de Chasles**:

$$\int_u^w f(x) dx = \int_u^v f(x) dx + \int_v^w f(x) dx .$$

**Théorème de stricte positivité.** Si  $f : S = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  (avec  $a < b$ ) est **continue et positive** sur  $S$ , alors  $\int_S f$  est nulle si et seulement si  $f$  est nulle sur  $S$ .

*Preuve:* cf. cours de 1ère année.

**Attention!** Ce théorème "de stricte positivité" ne vaut que pour les fonctions **continues**, et pas pour des fonctions continues par morceaux.

### 3. Extension aux fonctions complexes.

Si  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  est c.p.m., alors les fonctions réelles  $\text{Re}(f)$ ,  $\text{Im}(f)$  et  $|f|$  sont aussi c.p.m., et on pose

$$\int_S f = \int_S \text{Re}(f) + i \int_S \text{Im}(f) .$$

On a ainsi  $\text{Re} \left( \int_S f \right) = \int_S \text{Re}(f)$  et  $\text{Im} \left( \int_S f \right) = \int_S \text{Im}(f)$ .

Dans ce contexte, on a toujours

**Linéarité.** L'application  $\mathcal{I} : \begin{cases} \mathcal{C}_m(S, \mathbb{C}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_S f \end{cases}$  est une forme linéaire sur le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{C}_m(S, \mathbb{C})$ .

**Inégalité triangulaire intégrale (majoration du module).** Soit  $f \in \mathcal{C}_m(S, \mathbb{C})$ , on a alors

$$\left| \int_S f \right| \leq \int_S |f|.$$

#### 4. Fonctions c.p.m. sur un intervalle quelconque.

**Définition.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  est dite **continue par morceaux (c.p.m.)** sur  $I$  si sa restriction à tout segment de  $I$  est continue par morceaux.

**Exemples.** La fonction partie entière  $x \mapsto [x]$  est c.p.m. sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$  est c.p.m. sur  $]0, 1[$ . *Preuve laissée au lecteur.*

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  est c.p.m., alors pour tous  $a \in I$  et  $b \in I$ , on peut définir l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  et, si  $a, b, c$  sont trois points de  $I$ , on a la relation de Chasles

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

## II. Rappels du cours de PCSI et extensions aux fonctions c.p.m.

### 1. Le théorème fondamental de l'analyse (lien entre intégrale et primitive).

**Théorème.** Toute fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , admet des primitives sur  $I$ . Plus précisément, si  $a \in I$ , alors  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est l'unique primitive de  $f$  sur  $I$  qui s'annule au point  $a$ .

*Preuve.* Relire le cours de 1ère année!

**Remarque.** La fonction  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est ce que l'on appelle parfois une "intégrale fonction de sa borne supérieure". Dans l'écriture  $\int_a^x f(t) dt$ , le symbole  $x$  est une "variable libre" (le résultat de cette intégrale dépend de  $x$ ), l'écriture de l'intégrande doit alors faire intervenir une "variable muette", ici  $t$ , qui est un peu l'analogue de la notion de "variable locale à une procédure (ou fonction)" en informatique, la variable  $t$  "ne pouvant pas vivre" en dehors de l'intégrale. L'écriture  $\int_a^x f(x) dx$  prêterait à confusion et doit être proscrite!! Cette "variable d'intégration" joue le même rôle qu'un "indice de sommation" dans une somme, comme la lettre  $k$  dans l'écriture  $\sum_{k=1}^n k^2$ : la valeur  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  de cette somme s'exprime en fonction de  $n$  (variable libre) et non de  $k$  (variable muette). Il est essentiel de comprendre ces conventions de notation.

Avec les notations du théorème fondamental ci-dessus, la fonction  $F$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  avec  $F' = f$ . Les primitives de  $f$  diffèrent bien sûr d'une constante. En utilisant ce théorème fondamental, il est possible de faire l'étude (et notamment de dériver) des fonctions définies à l'aide d'intégrales, par exemple:

**Exercice II.1.1.** Sur  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ , dériver la fonction  $g : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ , étudier les variations de  $g$  sur  $]0, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$ .  $\square$

**Exercice II.1.2.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  continue, soient  $u, v : J \rightarrow I$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , où  $I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . Pour  $x \in J$ , on pose  $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ . Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$  et exprimer  $g'(x)$  pour  $x \in J$ .  $\square$

**Conséquences du théorème fondamental.**

(1). Si  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  est continue, si  $(a, b) \in I^2$ , alors  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ , où  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

(2). Si  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , si  $(a, b) \in I^2$ , alors  $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ .

**Extension aux fonctions continues par morceaux.**

Tout d'abord, une fonction continue par morceaux, mais pas continue (c'est-à-dire ayant au moins un point de discontinuité), sur un intervalle  $I$  n'admet pas de primitive sur cet intervalle. Je me limite à un exemple, celui de la fonction signe  $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Cette fonction est c.p.m. sur  $\mathbb{R}$ . Supposons qu'elle admette une

primitive  $F$  sur  $\mathbb{R}$ , alors  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec  $F' = \text{sgn}$ . La fonction  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ , continue sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = 1$  (puisque  $F'(x) = \text{sgn}(x) = 1$  pour  $x > 0$ ). Le théorème de la limite de la dérivée affirme alors que  $F'(0) = 1$ , ce qui est absurde puisqu'on doit avoir  $F'(0) = \text{sgn}(0) = 0$ .

En revanche, si  $f$  est c.p.m. sur un intervalle  $I$ , et si on fixe  $a \in I$ , il est toujours possible, pour tout  $x$  de  $I$ , de considérer l'intégrale  $\int_a^x f(t) dt$  qui est l'intégrale de  $f$  sur le segment

$[a, x]$  ou  $[x, a]$ . La fonction  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  n'est plus tout à fait une primitive de  $f$ , mais ce n'en est pas loin puisqu'elle est continue sur  $I$ , et dérivable en tout point  $x_0$  de  $I$  qui n'est pas une discontinuité de  $f$  avec dans ce cas  $F'(x_0) = f(x_0)$ . *On admet...*

Le lecteur vérifiera par exemple que, avec  $f = \text{sgn}$ , alors  $\int_0^x f(t) dt = |x|$ . La fonction valeur absolue est donc la "primitive généralisée" de la fonction signe s'annulant en 0.

## 2. Intégration par parties.

Rien de nouveau dans ce paragraphe puisque les fonctions doivent être de classe  $\mathcal{C}^1$ . Donc, si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ , on a

$$\int_a^b f(t) g'(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t) g(t) dt .$$

## 3. Changement de variable.

**Théorème.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  continue, où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soient d'autre part  $\alpha$  et  $\beta$  réels avec  $\alpha < \beta$ ,  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow I$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . On a alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du .$$

**Commentaire.** On ne cherchera pas à étendre ce résultat au cas où  $f$  est seulement continue par morceaux.

*Preuve.* Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . On a alors  $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$ .

Comme  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , de dérivée  $f$ , l'application composée  $F \circ \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\alpha, \beta]$ , de dérivée  $(f \circ \varphi)\varphi'$ . Donc

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du = [F \circ \varphi]_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) .$$

## 4. Sommes de Riemann.

**Théorème.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  est continue par morceaux, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt .$$

*On admet!* La démonstration peut toutefois être exigée dans le cas particulier où  $f$  est lipschitzienne.