DM de MATHÉMATIQUES numéro 1 COMMENTAIRES
PSI2 2024-2025

PROBLÈME 1

De façon générale, il y a beaucoup de copies qui se résument à des suites de calculs assez maladroits et très peu commentés, c'est bien dommage! Dites-vous qu'à un concours écrit, les correcteurs survolent les calculs, ils cherchent surtout des petits éléments de rédaction, des conjonctions, des liens logiques "donc", "or", des justifications du calcul comme "le dénominateur est non nul", "je prends la racine carrée car je sais que c'est positif", etc. Vous progresserez quand vous aurez compris cela!

1.a. Est-ce bien nécessaire de rédiger une analyse-synthèse pour une question aussi élémentaire, où il suffit d'écrire un système linéaire 2×2 et de le résoudre ? À ce sujet, il peut être bon de commencer par remarquer qu'il s'agit d'un **système de Cramer** (système linéaire dont la matrice est carrée inversible), ce qui garantit l'existence et l'unicité de la solution (*oui, cette notion est bien inscrite au programme de 1ère année, j'ai vérifié*), ensuite tous les moyens sont bons (par exemple faire des combinaisons linéaires des équations) pour obtenir cette solution unique.

1.b. Je n'ai pas beaucoup lu le mot "trapèze" dans les copies. Un schéma non commenté n'est pas une interprétation graphique!

1.d. et **1.e.** C'est le moment ou jamais d'utiliser ce que vous savez sur les fonctions convexes (le graphe est situé en-dessous de chaque sécante).

3.c. Éviter de "parachuter" une formule, du genre $I_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n+1)!}$, pour la montrer ensuite par récurrence. Expliquer plutôt comment on arrive à cette formule!

4.b. Une utilisation parfois erronée des équivalents. Je rappelle que, si $x_n \to a$ avec $x_n > 0$ et $a > 0$, alors $\ln(x_n) \to \ln(a)$ par **continuité** au point a de la fonction logarithme, on a ici travaillé sur des **limites** (on peut appeler cela "caractérisation séquentielle de la continuité"). En revanche, si $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$, on n'a pas en général $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(y_n)$, les **équivalents** ne "passent pas au logarithme" (ni à l'exponentielle, ni à...).

Dans beaucoup de copies, on lit la valeur de la constante C, mais l'équivalent de $n!$ n'en est pas déduit. Le plus dur était pourtant fait!

Je rappelle enfin que la notation $x!$ avec x réel (non entier naturel) n'a pas de sens.

PROBLÈME 2

1.b. Je rappelle que, pour une série alternée (vérifiant les bonnes hypothèses), le signe du reste fait partie de l'énoncé "définitif" du TSSA au programme, il n'y a donc pas lieu de démontrer "à la main" que r_n est du signe de $(-1)^n$.

2.a. La décroissance de la suite (V_n) découle de la "convexité" de la suite (v_n), i.e. de l'inégalité $v_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(v_n + v_{n+2})$. Cette vérification est parfois oubliée.

En revanche, le fait que $V_n = v_n - v_{n+1}$ tend vers 0 ne doit pas être déduit de l'hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1$, mais tout simplement de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, c'est d'ailleurs immédiat, non ?

2.e. Question un peu plus subtile, où l'on voit souvent apparaître des arguments erronés. Si vous pensez par exemple que $|r_{n+1}| \underset{n\to+\infty}{\sim} |r_n|$, il faut être capable de l'expliquer (le fait est qu'ici c'est vrai, mais ce ne serait pas vrai pour n'importe quelle suite tendant vers 0, prenez par exemple $r_n = e^{-n}$). La suite (r_n) tendant clairement vers $l = 0$ puisque c'est un reste de série convergente, il n'y a pas de raison a priori pour que $\dfrac{r_{n+1}}{r_n}$ tende vers 1, il n'est évidemment pas question de former le quotient $\dfrac{l}{l}$ (*vu pourtant dans beaucoup de copies*).

3.b. Mentionner le fait que $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = +\infty$.

3.c. La suite (v_n) doit ici vérifier les hypothèses données au début du problème, mézôssi les hypothèses du début de la question **2.**, ce dernier point a souvent été oublié.

3.d. Ici aussi, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ doit vérifier plusieurs hypothèses, ne pas en oublier!

PROBLÈME 3

Je n'ai pas beaucoup de commentaires à faire sur ce problème plutôt facile, qui permet de reprendre contact en douceur avec l'algèbre linéaire. Je signale tout de même quelques maladresses de certain(e)s qui ne pensent pas suffisamment à exploiter les questions précédentes. Par exemple pour montrer que E est stable par produit (question **3.**), il est bien plus simple et efficace d'utiliser **Q2.** et de montrer que $JAB = ABJ$, que de faire des calculs de sommes compliqués avec les coefficients des matrices. **Une bonne compréhension de l'algèbre doit permettre d'éviter de nombreux calculs indigestes et répétitifs!**

Je signale tout de même une petite erreur de logique fréquemment vue à la question **4.**: on a préalablement vu que l'ensemble E est stable par produit, i.e.

$$(A \in E \quad \text{et} \quad B \in E) \Longrightarrow AB \in E\ .$$

Certains croient pouvoir en déduire que, si $A \in E$ est inversible, comme $AA^{-1} = I_n$ appartient à E, alors nécessairement $A^{-1} \in E$... je ne comprends pas!