Structure d'espace vectoriel.

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{ax}$. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *On dit qu'une famille infinie de vecteurs est libre lorsque toute sous-famille finie est libre.*

- -

Soient $a_1, \cdots, a_n$ des réels distincts, que l'on peut toujours supposer rangés dans l'ordre croissant : $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Montrons que la famille $(f_{a_1}, \cdots, f_{a_n})$ est libre : soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f_{a_i} = 0$, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lambda_1\, e^{a_1 x} + \cdots + \lambda_n\, e^{a_n x} = 0\ ,$$

ou encore, en multipliant par $e^{-a_n x}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\, e^{(a_i - a_n)x} = 0\ .$$

En prenant la limite lorsque x tend vers $+\infty$, on obtient $\lambda_n = 0$. De proche en proche (ou, pour les plus courageux, en rédigeant une récurrence), on obtient que tous les λ_i sont nuls.

On a ainsi prouvé que toute sous-famille finie de la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

---

2. Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}\big([0,\pi],\mathbb{R}\big)$, montrer que

$$F = \Big\{ f \in E \ \Big|\ f(0) = f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = f(\pi) \Big\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$$

sont deux sous-espaces supplémentaires.

- -

Par analyse-synthèse:

• **Analyse:** Soit $u \in E$, supposons $u = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$, alors $g(x) = \alpha\, \cos(x) + \beta\, \sin(x)$, donc $u(x) = f(x) + \alpha\, \cos(x) + \beta\, \sin(x)$ et, en évaluant pour $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \pi$, on obtient les relations

$$u(0) = f(0) + \alpha \quad ; \quad u\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) + \beta \quad ; \quad u(\pi) = f(\pi) - \alpha\ .$$

Comme $f \in F$, on doit avoir $f(0) = f\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = f(\pi)$, notons γ leur valeur commune. On a donc le système $\begin{cases} \alpha + \gamma &= u(0) \\ \beta + \gamma &= u\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) \\ -\alpha + \gamma &= u(\pi) \end{cases}$. De ces relations, on tire $\alpha = \dfrac{u(0) - u(\pi)}{2}$ et $\beta = \dfrac{2\,u(\pi/2) - u(0) - u(\pi)}{2}$, ce qui détermine g, puis f par différence. Ceci montre l'**unicité** de la décomposition d'un "vecteur" de E comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

• **Synthèse:** Soit $u \in E$, soit $g : x \mapsto \dfrac{u(0) - u(\pi)}{2}\cos(x) + \dfrac{2\,u(\pi/2) - u(0) - u(\pi)}{2}\sin(x)$, et $f = u - g$, on a alors évidemment $u = f + g$ et $g \in G$ et le lecteur se fera un plaisir de vérifier que $f(0) = f\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = f(\pi) = \dfrac{u(0) + u(\pi)}{2}$, donc $f \in F$, ce qui prouve l'**existence** de la décomposition.

---

3. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille libre de vecteurs dans un espace vectoriel E, soit a un vecteur de E n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$. Montrer que la famille $(e_1 + a, \cdots, e_p + a)$ est libre.

- -

Supposons $\lambda_1(e_1 + a) + \cdots + \lambda_p(e_p + a) = 0_E$ avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ scalaires. On a alors **(*) :** $(\lambda_1 + \cdots + \lambda_p)a = -(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p)$.

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$, on déduit $a = -\dfrac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p}(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p) \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$, ce qui est exclu.

On a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 0$, puis $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0_E$ d'après **(*)**, ce qui entraîne que tous les λ_i sont nuls puisque la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre. On a ainsi prouvé que la famille $(e_1 + a, \cdots, e_p + a)$ est libre aussi.

Espaces vectoriels de dimension finie.

4. Soit p un entier naturel non nul, soit E l'ensemble des suites complexes p-périodiques, c'est-à-dire des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = u_n$.

a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Préciser sa dimension.

b*. Construire une base de E constituée de suites géométriques.

- -

a. Il est clair que l'ensemble E est non vide (contient la suite nulle), et est stable par combinaisons linéaires, c'est un s.e.v. de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Une suite de E est entièrement déterminée par la donnée de ses p premiers termes $u_0, u_1, \cdots, u_{p-1}$, ce qui se formalise en introduisant l'application $\varphi : E \to \mathbb{C}^p$, $u \mapsto (u_0, u_1, \cdots, u_{p-1})$. Cette application est clairement linéaire, et bijective d'après la remarque précédente, c'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels. On en déduit que $\dim(E) = \dim(\mathbb{C}^p) = p$.

b. Notons d'abord qu'une suite géométrique (r^n) appartient à E si et seulement sa raison r est une racine p-ème de l'unité (*évident, yaka l'écrire!*). Il y a donc exactement p suites géométriques appartenant à E: en posant $\omega = e^{\frac{2i\pi}{p}}$, ce sont les suites géométriques $u^{(k)}$ de raison ω^k, avec $0 \leq k \leq p-1$, et donc de terme général $u_n^{(k)} = (\omega^k)^n = \omega^{kn}$ pour tout n entier naturel. Comme $\dim(E) = p$, pour montrer que la famille $\left(u^{(0)}, u^{(1)}, \cdots, u^{(p-1)}\right)$ est une base de E, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soient donc $\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1}$ des nombres complexes tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^{(k)} = 0$ (la suite nulle), ce qui signifie que

$$\text{(*)} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \, u_n^{(k)} = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \, \omega^{kn} = 0 \, .$$

Rappelons à ce stade que, si j est un entier naturel, alors:

- si j est multiple de p, alors $\omega^j = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \omega^{kj} = \sum_{k=0}^{p-1} (\omega^j)^k = \sum_{k=0}^{p-1} 1 = p$;

- sinon, $\omega^j \neq 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \omega^{kj} = \sum_{k=0}^{p-1} (\omega^j)^k = \frac{1-(\omega^j)^p}{1-\omega^j} = 0$ puisque $(\omega^j)^p = (\omega^p)^j = 1$.

Fixons alors $j \in [\![0, p-1]\!]$. Multiplions par ω^{-jn} les relations **(*)** ci-dessus:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k\, \omega^{(k-j)n} = 0 \,.$$

En ajoutant toutes ces relations pour n allant de 0 à $p-1$, puis en intervertissant les sommations, on déduit

$$0 = \sum_{n=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k\, \omega^{(k-j)n} = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \Big(\sum_{n=0}^{p-1} \omega^{(k-j)n} \Big) = p\, \lambda_j \,.$$

On a ainsi montré que tous les λ_j sont nuls, ce qui montre que la famille $\big(u^{(0)}, u^{(1)}, \cdots, u^{(p-1)}\big)$ est libre, puis est une base de E.

Remarque 1. Une autre solution consiste à utiliser un déterminant de Vandermonde. On peut montrer ainsi que toute famille de suites géométriques dont les raisons sont distinctes est libre dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Remarque 2. En utilisant des résultats du cours à venir sur la réduction des endomorphismes, on peut aussi noter que, si l'on introduit dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'**opérateur de translation** $T : u \mapsto v$, où la suite $v = Tu$ est définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1}$, alors T est un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, et chaque suite $u^{(k)}$, $0 \leq k \leq p-1$, est vecteur propre de T pour la valeur propre ω^k. *Plus généralement, une suite u géométrique de raison r vérifie $Tu = ru$.* La famille $\big(u^{(0)}, u^{(1)}, \cdots, u^{(p-1)}\big)$ est alors libre car elle est constituée de vecteurs propres de T pour des valeurs propres distinctes.

---

5. Soit n un entier naturel ($n \geq 2$). Dans $\mathbb{K}[X]$, on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$.

- -

Pas de chance, les polynômes P_k ne sont pas échelonnés en degrés puisqu'ils sont tous du même degré n. L'idée à exploiter est qu'ils sont "échelonnés en valuations", la **valuation** d'un polynôme étant le plus bas degré pour lequel le coefficient est non nul : si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ est un polynôme non nul (*rappelons qu'une telle écriture sous-entend que les coefficients a_k sont nuls à partir d'un certain rang*), on pose

$$\mathrm{val}(P) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid P^{(k)}(0) \neq 0\} \ ;$$

on convient que la valuation du polynôme nul est $+\infty$. La valuation d'un polynôme non nul est aussi la multiplicité de la racine 0. Bon, tout ça, c'est pour la culture, le terme de "valuation" n'est pas au programme. Commençons donc à travailler au lieu de baratiner!

Pour montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $E = \mathbb{K}_n[X]$, il suffit de montrer qu'elle est libre ($n+1$ éléments d'un espace vectoriel de dimension $n+1$). Soient donc λ_0, λ_1, $\cdots$, λ_n des scalaires tels que **(*)** : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$. Le raisonnement le plus rapide est par l'absurde : supposons les λ_k non tous nuls, soit alors r le plus petit indice k pour lequel λ_k est non nul, soit $r = \min\{k \in [\![0, n]\!] \mid \lambda_k \neq 0\}$, la relation **(*)** s'écrit alors

$$0 = \sum_{k=r}^{n} \lambda_k P_k = \lambda_r X^r (1-X)^{n-r} + \lambda_{r+1} X^{r+1} (1-X)^{n-r-1} + \cdots + \lambda_n X^n \ .$$

On factorise et on simplifie par X^r qui n'est pas le polynôme nul (*un produit de polynômes est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul*), le polynôme

$$\lambda_r (1-X)^{n-r} + \lambda_{r+1} X (1-X)^{n-r-1} + \cdots + \lambda_n X^{n-r}$$

est alors le polynôme nul et, en évaluant ce polynôme pour $X = 0$, on obtient $\lambda_r = 0$, ce qui est contradictoire avec la définition de l'entier r.

---

6. Soient F, G, H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension n.

a. On suppose que $\dim(F) + \dim(G) > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

b. On suppose que $\dim(F) + \dim(G) + \dim(H) > 2n$. Montrer que $F \cap G \cap H \neq \{0\}$.

- -

a. La formule de Grassmann donne

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) > n - \dim(F+G) \ .$$

Or, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E, donc $\dim(F+G) \leq n$, on obtient donc $\dim(F \cap G) > 0$, soit $F \cap G \neq \{0_E\}$.

b. On applique deux fois la formule de Grassmann:

$$\begin{aligned}
\dim(F \cap G \cap H) &= \dim\big((F \cap G) \cap H\big) \\
&= \dim(F \cap G) + \dim(H) - \dim\big((F \cap G) + H\big) \\
&= \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) - \dim(F+G) - \dim\big((F \cap G) + H\big) \\
&> 2n - \Big(\dim(F+G) + \dim\big((F \cap G) + H\big)\Big) \ .
\end{aligned}$$

Or, $F + G$ et $(F \cap G) + H$ étant deux sous-espaces vectoriels de E, la somme de leurs dimensions ne peut excéder $2n$, on déduit donc $\dim(F \cap G \cap H) > 0$.

Applications linéaires.

7. Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E.

a. Montrer que p et q ont la même image si et seulement si $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les projecteurs p et q aient la même direction (c'est-à-dire le même noyau).

- -

a. • Supposons $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$; de $p \circ q = q$, on déduit $\operatorname{Im} q = \operatorname{Im}(p \circ q) \subset \operatorname{Im} p$, et de $q \circ p = p$, on déduit $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im}(q \circ p) \subset \operatorname{Im} q$; donc $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$.

• Supposons $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$. Pour tout $x \in E$, on a alors $q(x) \in \operatorname{Im} q$, donc $q(x) \in \operatorname{Im} p$ d'après l'hypothèse ; or, **les vecteurs de l'image d'un projecteur sont invariants par ce projecteur** car $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$, donc $p\big(q(x)\big) = q(x)$; on a donc $p \circ q = q$. On montre de même que $q \circ p = p$.

b. Montrons l'équivalence $\quad \operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q \iff (\, p \circ q = p \quad \text{et} \quad q \circ p = q)$.

• Supposons $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$; de $p \circ q = p$, on déduit $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker}(p \circ q) = \operatorname{Ker} p$, et de $q \circ p = q$, on déduit $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker}(q \circ p) = \operatorname{Ker} q$; donc $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$.

• Supposons $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$. Pour tout $x \in E$, le vecteur $p(x) - x$ appartient à $\operatorname{Ker} p$ puisque $p \circ (p - \mathrm{id}_E) = p^2 - p = 0$, donc ce vecteur appartient aussi à $\operatorname{Ker} q$, donc $q \circ (p - \mathrm{id}_E) = 0$, soit $q \circ p - q = 0$, donc $q \circ p = q$. On montre de même que $p \circ q = p$.

---

8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient u et v deux endomorphismes de E tels que

$$u = u \circ v \circ u \qquad \text{et} \qquad v = v \circ u \circ v\ .$$

a. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ sont des projecteurs.
b. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} v$.
c. On suppose E de dimension finie. Comparer les rangs de u, v, $u \circ v$ et $v \circ u$.

- -

a. $(u \circ v) \circ (u \circ v) = u \circ (v \circ u \circ v) = u \circ v$, donc $u \circ v$ est un projecteur, même chose pour $v \circ u$.

b. On a donc $E = \operatorname{Ker}(v \circ u) \oplus \operatorname{Im}(v \circ u)$. Mais $\operatorname{Ker}(v \circ u) = \operatorname{Ker} u$: en effet, on a la “trivialité” $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(v \circ u)$ mézôssi $\operatorname{Ker}(v \circ u) \subset \operatorname{Ker}\big(u \circ (v \circ u)\big) = \operatorname{Ker} u$. De la même façon, $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$.

c. De $\operatorname{Im} v = \operatorname{Im}(v \circ u)$, on tire $\operatorname{rg} v = \operatorname{rg}(v \circ u)$. On a aussi $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im}(u \circ v)$ par symétrie, donc $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u \circ v)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg}(u) &(1)\\ \dim E &= \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg}(v)\ , &(2) \end{aligned}$$

la relation (1) par le théorème du rang, et (2) car $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} v$ sont supplémentaires dans E. De (1) et (2), on déduit que $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v$, les quatre endomorphismes ont donc le même rang.

9.a. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe un scalaire $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x\, x$. Montrer que f est une homothétie.

b*. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soient f et g deux applications linéaires de E vers F. On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe un scalaire $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x\, g(x)$. Montrer qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda g$.

- -

a. Notons que, pour tout vecteur x non nul, le scalaire λ_x est entièrement déterminé.

Soient x et y deux vecteurs de E non colinéaires, on a $f(x) = \lambda_x\, x$, $f(y) = \lambda_y\, y$ et $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$, mais on a aussi par linéarité $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x\, x + \lambda_y\, y$. De ces deux relations et de la liberté de la famille (x, y), on tire $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$, donc $\lambda_x = \lambda_y$.

Si x et y sont deux vecteurs colinéaires mais non nuls, par exemple $y = \alpha x$, alors $f(x) = \lambda_x x$, $f(y) = \lambda_y\, y = \alpha\, \lambda_y\, x$, mais aussi, par linéarité, $f(y) = \alpha f(x) = \alpha\, \lambda_x\, x$. Comme $\alpha \neq 0$ et $x \neq 0_E$, on tire $\lambda_x = \lambda_y$.

Finalement, le scalaire λ_x est le même pour tous les vecteurs x non nuls de E, notons-le λ, on a alors $f(x) = \lambda x$ pour tout vecteur x non nul, et cette relation étant trivialement vraie pour $x = 0_E$, on a bien $f = \lambda\, \mathrm{id}_E$.

b. Notons d'abord que $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Soient x et y tels que $g(x)$ et $g(y)$ ne soient pas colinéaires, on a alors $f(x) = \lambda_x\, g(x)$, $f(y) = \lambda_y\, g(y)$, $f(x+y) = \lambda_{x+y}\, \big(g(x) + g(y)\big)$, mais on a aussi $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x\, g(x) + \lambda_y\, g(y)$. Par identification, la famille $\big(g(x), g(y)\big)$ étant libre, on déduit $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

Si x et y sont tels que $g(x)$ et $g(y)$ sont colinéaires mais non nuls, autrement dit x et y n'appartiennent pas au noyau de g, alors il existe α scalaire non nul tel que $g(y) = \alpha\, g(x)$, donc $y - \alpha x \in \mathrm{Ker}(g)$, puis $y - \alpha x \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $f(y) = \alpha f(x)$. Les relations $f(x) = \lambda_x g(x)$, $f(y) = \lambda_y\, g(y) = \lambda_y\, \alpha\, g(x)$, mais aussi $f(y) = \alpha f(x) = \alpha\, \lambda_x\, g(x)$ donnent encore $\lambda_x = \lambda_y$.

Finalement, le scalaire λ_x est le même pour tous les vecteurs x de E n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}(g)$, notons-le λ, on a alors $f(x) = \lambda g(x)$ pour tout vecteur $x \in E \setminus \mathrm{Ker}(g)$, et cette relation étant trivialement vraie pour $x \in \mathrm{Ker}(g)$, on a bien $f = \lambda g$.

---

10. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que $f^3 = \mathrm{id}_E$. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)\ .$$

- -

Procédons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $x \in E$, supposons que $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $z \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$. Alors $f(y) = y$ et il existe $t \in E$ tel que $z = f(t) - t$. On a alors

$$x = y + f(t) - t \quad ; \quad f(x) = y + f^2(t) - f(t) \quad ; \quad f^2(x) = y + t - f^2(t)$$

(la dernière relation en utilisant $f^3 = \mathrm{id}_E$). En ajoutant ces trois relations, on a $y = \dfrac{1}{3}\big(x + f(x) + f^2(x)\big)$, puis $z = x - y$, soit $z = \dfrac{1}{3}\big(2x - f(x) - f^2(x)\big)$. Le fait que l'on puisse expliciter y et z en fonction de x montre l'**unicité** de la décomposition d'un vecteur de E comme somme d'un vecteur de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et d'un vecteur de $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$.

Synthèse. Soit $x \in E$, posons $y = \dfrac{1}{3}\big(x + f(x) + f^2(x)\big)$ et $z = \dfrac{1}{3}\big(2x - f(x) - f^2(x)\big)$. On a alors trivialement $x = y + z$, $f(y) = \dfrac{1}{3}\big(f(x) + f^2(x) + f^3(x)\big) = y$ (en utilisant $f^3 = \mathrm{id}_E$) donc $y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, et en tâtonnant un peu on finit par trouver que $z = f(t) - t$ avec $t = \dfrac{1}{3}\big(f^2(x) - x\big)$ donc $z \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$. Cette vérification (synthèse) montre l'**existence** d'une décomposition.

---

11. Soient f, g, h des endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que

$$f \circ g = h\ , \quad g \circ h = f \quad \text{et} \quad h \circ f = g\ .$$

a. Montrer que f, g, h ont même noyau et même image.

b. Montrer que $f^5 = f$.

c. En déduire que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

- -

a. Les hypothèses faites entraînent, dans l'ordre, les inclusions

$$\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(h) \qquad , \qquad \mathrm{Ker}(h) \subset \mathrm{Ker}(f) \qquad , \qquad \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)\ .$$

On en déduit que les trois noyaux sont égaux.

De même on a, dans l'ordre,

$$\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Im}(f) \qquad , \qquad \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g) \qquad , \qquad \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(h)\ ,$$

d'où l'égalité des trois images.

b. Notons d'abord que (*en omettant le* $\circ$ *de la composition*):

$$f^2 = (gh)f = g(hf) = g^2\ ,$$

puis, toujours par associativité de la loi $\circ$:

$$f = gh = (hf)(fg) = h\, f^2\, g = (fg)\, f^2\, g = (fg)\, g^2\, g = f(g^2)(g^2) = f(f^2)(f^2) = f^5\ .$$

c. Procédons par analyse-synthèse: soit $x \in E$, supposons $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Im}(f)$ et $z \in \mathrm{Ker}(f)$. On peut alors écrire $y = f(t)$ avec $t \in E$. On applique f^4, on obtient $f^4(x) = f^4(y) = f^5(t) = f(t) = y$, ainsi $y = f^4(x)$ et $z = x - f^4(x)$, ce qui termine la partie analyse.

Passons à la synthèse: si $x \in E$, posons $y = f^4(x)$ et $z = x - f^4(x)$, on a alors bien $y + z = x$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$, et enfin $f(z) = f(x) - f^5(x) = 0_E$ donc $z \in \mathrm{Ker}(f)$, ce qu'il fallait prouver.

Applications linéaires en dimension finie.

12. Noyaux itérés d'un endomorphisme. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit u un endomorphisme de E. Pour tout entier naturel k, on note $n_k = \dim(\mathrm{Ker}\, u^k)$.

a. Montrer que la suite (n_k) est croissante.

b. On pose $p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n_{k+1} = n_k\}$. Justifier l'existence d'un tel entier p.

c. Montrer que $n_k = n_p$ pour tout entier k supérieur à p.

d. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, u^p \oplus \mathrm{Im}\, u^p$.

- -

a. Pour tout entier k, notons $N_k = \mathrm{Ker}(u^k)$, ce sont les **noyaux itérés** de l'endomorphisme u. On a $N_0 = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E) = \{0_E\}$ donc $n_0 = 0$, et la suite de sous-espaces (N_k) est croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire $N_k \subset N_{k+1}$ (*évident*), d'où il résulte que $n_k \leq n_{k+1}$: la suite d'entiers naturels (n_k) est donc croissante.

b. Il existe au moins un entier k tel que $n_k = n_{k+1}$: en effet, si ce n'était pas le cas, on aurait $n_{k+1} > n_k$ pour tout k et, comme les n_k sont des entiers, cela entraînerait $n_{k+1} \geq n_k + 1$ pour tout k puis, par une récurrence immédiate, $n_k \geq k$ pour tout k, on aurait donc $\lim\limits_{k \to +\infty} n_k = +\infty$, ce qui est absurde puisqu'on doit avoir $n_k \leq \dim E$ pour tout k.

L'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid n_{k+1} = n_k\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide, elle admet donc un plus petit élément (un minimum) p.

c. On a en particulier $n_{p+1} = n_p$, donc $N_{p+1} = N_p$ (*on connaît l'inclusion* $N_p \subset N_{p+1}$ *et on a l'égalité des dimensions*). On va prouver que $N_p = N_{p+1} = N_{p+2} = \cdots$, autrement dit la suite des noyaux itérés de u est stationnaire à partir du rang p, il suffit pour cela de prouver que $N_{p+k+1} = N_{p+k}$ pour tout entier naturel k. On a déjà l'inclusion $N_{p+k} \subset N_{p+k+1}$. Soit maintenant $x \in N_{p+k+1}$, alors $u^{p+k+1}(x) = 0_E$, soit $u^{p+1}\big(u^k(x)\big) = 0_E$, donc $u^k(x) \in N_{p+1}$, donc $u^k(x) \in N_p$ (*cf.* plus haut), donc $u^{p+k}(x) = 0_E$ et $x \in N_{p+k}$, ce qui prouve l'inclusion inverse. La suite d'entiers (n_k) est donc aussi stationnaire à partir du rang p.

d. Soit $x \in \operatorname{Ker} u^p \cap \operatorname{Im} u^p$, alors $u^p(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = u^p(y)$. On a alors $0_E = u^p(x) = u^{2p}(y)$, soit $y \in N_{2p}$. Mais $N_{2p} = N_p$, donc $y \in N_p$, c'est-à-dire $x = u^p(y) = 0_E$. On a ainsi prouvé que $\operatorname{Ker} u^p \cap \operatorname{Im} u^p = \{0_E\}$, ces deux sous-espaces sont donc en somme directe. Il en résulte que

$$\dim(\operatorname{Ker} u^p + \operatorname{Im} u^p) = \dim(\operatorname{Ker} u^p) + \dim(\operatorname{Im} u^p) = \dim E \ ,$$

la deuxième égalité découlant du théorème du rang. Donc $\operatorname{Ker} u^p + \operatorname{Im} u^p = E$: ces deux sous-espaces sont supplémentaires, ce qui s'écrit $\operatorname{Ker} u^p \oplus \operatorname{Im} u^p = E$.

---

13. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension trois, soit u un endomorphisme de E tel que

$$u^3 = 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rg} u = 2 \ .$$

a. Montrer que $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Ker} u$. Qu'en déduit-on pour le rang de u^2 ?

b. Soit $v = u|_{\operatorname{Im} u}$ (endomorphisme de $\operatorname{Im} u$ induit par u, ou encore restriction de u au sous-espace $\operatorname{Im} u$). Déterminer $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$. En déduire que $\operatorname{rg} u^2 = 1$.

c. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- -

a. On a $u^3 = u \circ u^2 = 0$, donc $\operatorname{Im}(u^2) \subset \operatorname{Ker} u$. *Rappelons, de façon plus générale, l'équivalence* $v \circ u = 0 \iff \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$. On en déduit, avec le théorème du rang, que

$$\operatorname{rg}(u^2) = \dim(\operatorname{Im} u^2) \leq \dim(\operatorname{Ker} u) = 3 - \operatorname{rg}(u) = 1 \ .$$

b. On a

$$\operatorname{Im} v = \big\{z \in E \mid \exists y \in \operatorname{Im} u \quad z = u(y)\big\} = \big\{z \in E \mid \exists x \in E \quad z = u^2(x)\big\} = \operatorname{Im}(u^2) \ .$$

On peut écrire aussi $\operatorname{Im} v = u(\operatorname{Im} u) = \operatorname{Im}(u^2)$. Puis, $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$. *Plus généralement, si F est un sous-espace vectoriel de E, on a* $\operatorname{Ker}(u|_F) = F \cap \operatorname{Ker} u$, *et* $\operatorname{Im}(u|_F) = u(F)$.

On voit ainsi que $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Im} u$, donc $\dim(\operatorname{Ker} v) \leq \dim(\operatorname{Im} u) = \operatorname{rg}(u) = 2$ puis, par le théorème du rang,

$$\operatorname{rg}(u^2) = \operatorname{rg}(v) = 3 - \dim(\operatorname{Ker} v) \geq 1 \ .$$

Finalement, $\operatorname{rg}(u^2) = 1$ (autrement dit, u^2 n'est pas l'endomorphisme nul).

c. Il faut construire une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E telle que

$$\textbf{(*)} \quad : \quad u(e_1) = 0_E \quad ; \quad u(e_2) = e_1 \quad ; \quad u(e_3) = e_2 \ .$$

Notons que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u^2$: en effet, $u^3 = u \circ u^2 = 0$, donc $\operatorname{Im}(u^2) \subset \operatorname{Ker}(u)$ et on a d'autre part l'égalité des dimensions : $\operatorname{rg}(u^2) = \dim(\operatorname{Ker} u) = 1$ d'après ce qui précède. Choisissons un vecteur e_1 tel que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}(e_1)$, alors $e_1 \in \operatorname{Im}(u^2)$, donc il existe $e_3 \in E$ tel que $e_1 = u^2(e_3)$. Posons enfin $e_2 = u(e_3)$. Les vecteurs e_1, e_2, e_3 ainsi choisis vérifient les conditions **(*)**, il ne reste plus qu'à s'assurer qu'ils sont linéairement indépendants. Supposons donc $\alpha\, e_1 + \beta\, e_2 + \gamma\, e_3 = 0_E$; en appliquant u^2, on obtient $\gamma\, e_1 = 0_E$ et, comme $e_1 \neq 0_E$, il en résulte $\gamma = 0$. On a alors $\alpha\, e_1 + \beta\, e_2 = 0_E$ et, en appliquant u, il vient $\beta\, e_1 = 0_E$, d'où $\beta = 0$; il reste enfin $\alpha\, e_1 = 0_E$, donc $\alpha = 0$. La famille (e_1, e_2, e_3) est libre, c'est donc une base de E puisqu'elle est de cardinal 3.

---

14. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme **nilpotent** (il existe un entier naturel k tel que $u^k = 0$).

a. Soit x un vecteur de E. Soit q le plus petit entier naturel tel que $u^q(x) = 0$ (*justifier son existence*). Montrer que la famille $\big(x, u(x), \cdots, u^{q-1}(x)\big)$ est libre. En déduire que $u^n = 0$.

b. On suppose de plus $u^{n-1} \neq 0$ (justifier l'existence de tels endomorphismes). Montrer que l'endomorphisme u n'admet pas de racine carrée (c'est-à-dire il n'existe pas d'endomorphisme f de E tel que $f^2 = u$).

- -

a. Le vecteur $x \in E$ étant fixé, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u^k(x) = 0_E\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, non vide puisque l'endomorphisme u est nilpotent. On peut donc définir un entier naturel $q = \min\{k \in \mathbb{N} \mid u^k(x) = 0_E\}$. Cet entier q ou $q(x)$ dépend du choix du vecteur x. *Remarquons que, si $x \neq 0_E$, alors $q \geq 1$ et $u^{q-1}(x) \neq 0_E$. Si $x = 0_E$, alors $q = 0$ et la famille $\big(x, u(x), \cdots, u^{q-1}(x)\big)$ est vide!* Soient maintenant λ_0, λ_1, $\cdots$, λ_{q-1} des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$; par l'absurde, supposons-les non tous nuls, soit alors l'entier $p = \min\big\{k \in [\![0, q-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0\big\}$, on a alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$. En appliquant u^{q-1-p}, on obtient $\lambda_p u^{q-1}(x) = 0_E$ (puisque $u^k(x) = 0_E$ pour tout $k \geq q$), ce qui est absurde puisque $\lambda_p \neq 0$ et $u^{q-1}(x) \neq 0_E$. On a ainsi prouvé que les coefficients λ_k sont tous nuls, d'où la liberté de la famille de vecteurs considérée. Comme $\dim E = n$, cette famille comporte au plus n éléments, soit $q(x) \leq n$ pour tout vecteur x de E. On a donc $u^n(x) = 0_E$ pour tout x, donc u^n est l'endomorphisme nul de E.

b. Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, il existe des endomorphismes nilpotents d'indice $n-1$ (c'est-à-dire tels que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$). Pour en construire un, considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, soit u l'endomorphisme tel que $u(e_1) = 0_E$, et $u(e_k) = e_{k-1}$ si $2 \leq k \leq n$; on vérifie que $u^n(e_k) = 0_E$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ donc $u^n = 0$, mais $u^{n-1}(e_n) = e_1$ donc $u^{n-1} \neq 0$. Cet endomorphisme est représenté dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & (0) \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$.

Supposons qu'il existe un endomorphisme f tel que $f^2 = u$. Alors $u^n = f^{2n} = 0$, donc f est nilpotent. De la question **a.**, on déduit alors que $f^n = 0$. Mais comme $2n - 2 \geq n$ (*on a supposé que* $n = \dim E \geq 2$), on a aussi $f^{2n-2} = 0$, c'est-à-dire $u^{n-1} = 0$, ce qui est contradictoire. L'endomorphisme u n'admet donc pas de "racine carré".

---

15. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Montrer que f est un projecteur si et seulement si $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(\mathrm{id}_E - f) = n$.

- -

• Si f est un projecteur, alors $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - f) = \mathrm{Ker}(f)$, la relation $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(\mathrm{id}_E - f) = n$ est alors une conséquence directe du théorème du rang.

• Inversement, supposons $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(\mathrm{id}_E - f) = n$. Les sous-espaces $F = \mathrm{Im}(f)$ et $G = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$ vérifient alors $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$, mais ils vérifient aussi $E = F + G$ puisque tout vecteur x de E admet la décomposition triviale $x = f(x) + \big(x - f(x)\big)$ avec $f(x) \in F$ et $x - f(x) \in G$. De la formule de Grassmann, on déduit alors que $\dim(F \cap G) = 0$, donc que F et G sont supplémentaires dans E. Enfin, la décomposition $x = f(x) + \big(x - f(x)\big)$ montre que f est le projecteur sur F parallèlement à G.

---

16. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension trois, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f = 0$.

a. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

b. On suppose $f \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f est représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- -

a. Sans utiliser ici d'hypothèse sur la dimension, procédons par analyse-synthèse:

• **Analyse.** Soit $x \in E$, supposons $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Im}(f)$ et $z \in \mathrm{Ker}(f)$, alors il existe $u \in E$ tel que $y = f(u)$, puis $f(x) = f(y) + f(z) = f^2(u)$, puis $f^2(x) = f^3(u) = -f(u) = -y$, donc on récupère $y = -f^2(x)$ et $z = x + f^2(x)$, ceci garantit l'unicité de la décomposition.

• **Synthèse.** Soit $x \in E$, posons $y = -f^2(x)$ et $z = x + f^2(x)$. Il est immédiat que $x = y + z$, que $y \in \mathrm{Im}(f)$, et que $z \in \mathrm{Ker}(f)$ en utilisant la relation $f^3 + f = 0$.

On a bien prouvé que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

b. Si l'endomorphisme f était bijectif, alors de la relation $f^3 = -f$, on déduirait $f^2 = -\mathrm{id}_E$ puis, avec le déterminant, $\det(f)^2 = (-1)^3 = -1$, ce qui est absurde. Donc $\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$, donc $\dim(\mathrm{Ker}\, f) \geq 1$ et $\dim(\mathrm{Im}\, f) \leq 2$ par le théorème du rang.

Si on suppose $f \neq 0$, alors $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_E\}$, soit $x \in \mathrm{Im}(f)$ non nul, alors il existe $u \in E$ tel que $x = f(u)$, puis $f(x) = f^2(u)$, puis $f^2(x) = f^3(u) = -f(u) = -x$. Les vecteurs x et $f(x)$ sont alors non colinéaires: s'il existait un réel α tel que $f(x) = \alpha x$, on aurait alors $f^2(x) = \alpha^2 x = -x$ d'où $\alpha^2 = -1$ absurde. Comme $\dim(\mathrm{Im}\, f) \leq 2$, on déduit que la famille $\big(x, f(x)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

En conséquence, $\mathrm{Ker}(f)$ est une droite. Si a est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f)$ et x un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f)$, alors la famille $\mathcal{B} = \big(a, f(x), x\big)$ est une base de E dans laquelle f est représenté par la matrice A.

---

17. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer

$$\left|\,\mathrm{rg}(f)-\mathrm{rg}(g)\right| \leq \mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)\ .$$

- -

On a trivialement $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$, d'où

$$\mathrm{rg}(f+g)=\dim\big(\mathrm{Im}(f+g)\big) \leq \dim\big(\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)\big) \leq \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)+\dim\big(\mathrm{Im}(g)\big)=\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)\ .$$

On en déduit que $\mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}\big((f+g)+(-g)\big) \leq \mathrm{rg}(f+g)+\mathrm{rg}(g)$, soit $\mathrm{rg}(f)-\mathrm{rg}(g) \leq \mathrm{rg}(f+g)$. En échangeant les rôles de f et de g, on obtient $\mathrm{rg}(g)-\mathrm{rg}(f) \leq \mathrm{rg}(f+g)$, et la conjonction de ces deux dernières inégalités donne $\left|\,\mathrm{rg}(f)-\mathrm{rg}(g)\right| \leq \mathrm{rg}(f+g)$.

---

18. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie.

a. Montrer que $\mathrm{rg}(g\circ f) \leq \min\big\{\,\mathrm{rg}(f),\mathrm{rg}(g)\big\}$.

b. Montrer que $\mathrm{rg}(g\circ f) \geq \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)-\dim(E)$. *On pourra considérer l'application linéaire* $u=g\Big|_{\mathrm{Im}(f)}$.

c. Soient $f_1,\,\cdots,\,f_m$ des endomorphismes de E. Montrer que

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f_1\circ\cdots\circ f_m)\big) \leq \sum_{k=1}^{m}\dim\big(\mathrm{Ker}\, f_k\big)\ .$$

- -

a. On a $\mathrm{Im}(g\circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$, d'où, en passant aux dimensions, $\mathrm{rg}(g\circ f) \leq \mathrm{rg}(g)$. Par ailleurs, $\mathrm{Im}(g\circ f)=g\big(\mathrm{Im}(f)\big)$ et, comme une application linéaire diminue toujours les dimensions, $\mathrm{rg}(g\circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$. On a bien obtenu $\mathrm{rg}(g\circ f) \leq \min\big\{\,\mathrm{rg}(f),\mathrm{rg}(g)\big\}$.

b. On applique le théorème du rang à l'application linéaire $u=g\Big|_{\mathrm{Im}(f)} : \mathrm{Im}\, f \to E$, cela donne

$$\dim(\mathrm{Im}\, f)=\dim(\mathrm{Im}\, u)+\dim(\mathrm{Ker}\, u)\ .$$

mais $\mathrm{Im}\, u=g(\mathrm{Im}\, f)=\mathrm{Im}(g\circ f)$ et $\mathrm{Ker}\, u=\mathrm{Ker}\, g\ \cap\ \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$, donc

$$\mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}(g\circ f)+\dim(\mathrm{Ker}\, g\ \cap\ \mathrm{Im}\, f) \leq \mathrm{rg}(g\circ f)+\dim(\mathrm{Ker}\, g)\ ,$$

ou encore $\mathrm{rg}(g\circ f) \geq \mathrm{rg}(f)-\dim(\mathrm{Ker}\, g)$. En appliquant maintenant le théorème du rang à l'application linéaire g, on a $\dim(\mathrm{Ker}\, g)=\dim E-\mathrm{rg}(g)$ et, en substituant, il vient

$$\mathrm{rg}(g\circ f) \geq \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)-\dim(E)\ .$$

c. Par récurrence sur m: la propriété est triviale pour $m=1$ et, si elle est vraie pour un $m\in\mathbb{N}^*$ donné, soient $m+1$ endomorphismes $f_1,\,\cdots,\,f_m,\,f_{m+1}$, posons $g=f_1\circ\cdots\circ f_m$, on a par hypothèse $\dim\big(\mathrm{Ker}(g)\big) \leq \sum_{k=1}^{m}\dim\big(\mathrm{Ker}\, f_k\big)$, ce qui s'écrit aussi, grâce au théorème du rang

$$\mathrm{rg}(g) \geq \sum_{k=1}^{m}\mathrm{rg}(f_k)-(m-1)\ \dim(E)\ .$$

En appliquant le **b.**, on déduit

$$\mathrm{rg}(f_1 \circ \cdots \circ f_m \circ f_{m+1}) = \mathrm{rg}(g \circ f_{m+1}) \geq \mathrm{rg}(g) + \mathrm{rg}(f_{m+1}) - \dim(E) \geq \sum_{k=1}^{m+1} \mathrm{rg}(f_k) - m \dim(E) \ ,$$

ce qui, de nouveau par le théorème du rang, donne $\dim\big(\mathrm{Ker}(f_1 \circ \cdots \circ f_{m+1})\big) \leq \sum_{k=1}^{m+1} \dim\big(\mathrm{Ker}\, f_k\big)$,

ce qu'il fallait démontrer.

---

19. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit V un sous-espace vectoriel de E. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F s'annulant sur V.

a. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

b*. Trouver la dimension de $\mathcal{A}$.

- -

a. Il est évident que l'ensemble $\mathcal{A}$ contient l'application nulle, et est stable par combinaisons linéaires.

b. Soit W un supplémentaire de V dans E, on a alors $\dim(W) = \dim(E) - \dim(V)$. On sait qu'une application linéaire de E vers F est entièrement déterminée par la donnée de ses restrictions à V et à W. Si l'on impose que cette application s'annule sur V, elle est alors entièrement déterminée par sa restriction à W. En des termes plus formalisés, l'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{A} \ \to \ \mathcal{L}(W,F) \\ u \ \mapsto \ u\big|_W \end{cases}$ est bijective. Comme cette application φ est clairement linéaire, c'est donc un isomorphisme. On en déduit que

$$\dim(\mathcal{A}) = \dim\big(\mathcal{L}(W,F)\big) = \dim(W) \times \dim(F) = \big(\dim(E) - \dim(V)\big) \times \dim(F) \ .$$

---

20. Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

a. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g) \iff E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g)$.

b. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$.

- -

a. $\Longrightarrow$ Supposons $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$. Comme on a l'inclusion triviale $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ et l'égalité des dimensions, on a donc $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g \circ f)$. Soit $x \in E$, alors $g(x) \in \mathrm{Im}(g)$ donc $g(x) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$, donc il existe $y \in E$ tel que $g(x) = g\big(f(y)\big)$. On a alors $g\big(x - f(y)\big) = 0_E$ donc $x - f(y) \in \mathrm{Ker}(g)$. Ainsi, $x = f(y) + \big(x - f(y)\big) \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g)$.

$\Longleftarrow$ Supposons $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g)$, montrons alors que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$. L'inclusion directe est immédiate. Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Im}(g)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$, on peut décomposer $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Im}(f)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(g)$, donc il existe $t \in E$ tel que $x_1 = f(t)$, puis $y = g(x_1 + x_2) = g(x_1) = g\big(f(t)\big) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$. On a donc aussi l'inclusion $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$.

b. $\Longrightarrow$ Supposons $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$. Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim \mathrm{Ker}(g \circ f) = \dim(\mathrm{Ker}\, f)$. Comme on a l'inclusion triviale $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$, on a donc $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$. Soit alors $x \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$, on a donc $g(x) = 0_E$ et il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$. Ainsi, $g\big(f(t)\big) = 0_E$ et $t \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$, d'où $t \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $x = f(t) = 0_E$. On a bien prouvé que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0_E\}$.

$\Longleftarrow$ Supposons $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0_E\}$. On a l'inclusion triviale $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$, montrons donc l'inclusion réciproque! Si $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$, alors $g\big(f(x)\big) = 0_E$, donc $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$, donc $f(x) = 0_E$ et $x \in \mathrm{Ker}(f)$. De l'égalité $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$, on déduit l'égalité des dimensions de ces sous-espaces puis, par théorème du rang, l'égalité $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

Calcul matriciel.

21. Théorème d'Hadamard. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **à diagonale strictement dominante**, c'est-à-dire telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \,.$$

Supposons qu'il existe un vecteur **non nul** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$, soit $s \in [\![1, n]\!]$ un indice tel que $|x_s| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. En considérant la s-ième coordonnée du vecteur AX, obtenir une contradiction. En déduire que la matrice A est inversible.

- -

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale strictement dominante, supposons qu'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ **non nul** tel que $AX = 0$. Soit $s \in [\![1, n]\!]$ un indice tel que $|x_s| = \|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| > 0$. En écrivant que la s-ième coordonnée du vecteur AX est nulle, on obtient la relation $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{s,j} x_j = 0$, que l'on peut écrire sous la forme $a_{s,s} x_s = -\displaystyle\sum_{j \neq s} a_{s,j} x_j$, d'où l'on déduit

$$|a_{s,s}|\, |x_s| = \left| \sum_{j \neq s} a_{s,j} x_j \right| \leq \sum_{j \neq s} |a_{s,j}|\, |x_j| \leq \Big(\sum_{j \neq s} |a_{s,j}| \Big)\, |x_s| \,.$$

En divisant par $|x_s|$ (qui est un réel strictement positif), on obtient $|a_{s,s}| \leq \displaystyle\sum_{j \neq s} |a_{s,j}|$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc $AX = 0 \Longrightarrow X = 0$, la matrice A est inversible (c'est le **théorème d'Hadamard**).

À titre d'exemple, les matrices ci-dessous sont à diagonale strictement dominante, donc inversibles :

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & -3 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,.$$

22. On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Montrer que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et que cet ensemble est stable par le produit matriciel. Montrer que, si une matrice A de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est inversible, alors son inverse A^{-1} appartient aussi à $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

- -

• Il est facile de voir que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$, puisqu'il admet pour base la famille $(E_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$, et que le nombre de couples $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$ tels que $i\leq j$ est $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

• Soient $E_{i,j}$ et $E_{k,l}$ deux matrices élémentaires figurant dans la base proposée ci-dessus, i.e. avec $i\leq j$ et $k\leq l$, on a alors

- soit $E_{i,j}E_{k,l}=0$ (si $j\neq k$) ;

- soit $E_{i,j}E_{k,l}=E_{i,l}$ (si $j=k$) avec dans ce cas $i\leq l$ par transitivité de la relation d'ordre.

Le produit de deux des matrices de la base "canonique" de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ étant encore dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, on déduit du fait que c'est un s.e.v. (stabilité par combinaisons linéaires) la stabilité de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ par le produit matriciel.

• ***Autre méthode.*** Notons $\mathcal{B}_0=(e_1,\cdots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, soit le s.e.v. $F_k=\mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_k)$. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si u_A est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, l'honorable lecteur se persuadera facilement du fait que A est triangulaire supérieure **si et seulement si**, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, le s.e.v. F_k est stable par u_A. Si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures, alors chaque s.e.v. F_k est stable par u_A et par u_B, donc est stable par $u_A\circ u_B=u_{AB}$. Donc la matrice-produit AB est encore triangulaire supérieure.

• Soit $A\in\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, inversible. L'application $\varphi_A:\begin{cases}\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})\\ M & \mapsto & AM\end{cases}$ est déjà bien définie d'après le point précédent, elle est évidemment linéaire, et elle est injective car l'inversibilité de A entraîne $\mathrm{Ker}(\varphi_A)=\{0\}$. C'est donc un endomorphisme injectif de l'e.v. de dimension finie $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, donc il est bijectif, donc il existe $B\in\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ telle que $\varphi_A(B)=I_n$, soit $AB=I_n$, et finalement $B=A^{-1}\in\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

---

23. Inverser les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & & & (1)\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & 2\\ (0) & & & 1\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- -

a. Inversons ces matrices par l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan (i.e. par opérations élémentaires), considérons donc la "matrice augmentée" $M=(\,A\quad I_n\,)\in\mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$. On constate que les opérations élémentaires sur les lignes $L_i\leftarrow L_i-L_{i+1}$, avec i de 1 à $n-1$ dans l'ordre croissant, transforment M en $M'=(\,I_n\quad A'\,)\in\mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$, avec

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ (0) & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } A^{-1} = A'.$$

b. On peut reprendre la même méthode en effectuant maintenant deux fois la suite d'opérations élémentaires sur les lignes évoquée à la question **a.** Mais en fait ceci revient à constater que $B = A^2$, d'où $B^{-1} = (A^2)^{-1} = (A^{-1})^2 = A'^2$, soit

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & (0) \\ & 1 & -2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & & & -2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

---

24. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $A = X^4 - 1$, $B = X^4 - X$. On considère l'application φ de E dans E qui, à tout polynôme P, associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.

a. Montrer que φ est un endomorphisme de E.

b. Écrire la matrice de φ relativement à la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

c. Déterminer $\operatorname{Ker} \varphi$.

d. Montrer que $\operatorname{Im} \varphi = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.

- -

a. L'image d'un polynôme de $E = \mathbb{R}_3[X]$ est bien un élément de E (le reste d'une division par $X^4 - X$ est de degré au plus trois). Si $\varphi(P_1) = R_1$ et $\varphi(P_2) = R_2$, on a alors $AP_1 = BQ_1 + R_1$, $AP_2 = BQ_2 + R_2$ avec $\deg R_1 < 4$, $\deg R_2 < 4$, où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes. Si λ et μ sont deux réels, on a alors $A(\lambda P_1 + \mu P_2) = B(\lambda Q_1 + \mu Q_2) + (\lambda R_1 + \mu R_2)$, avec $\deg(\lambda R_1 + \mu R_2) < 4$, ce qui montre que ce dernier polynôme est bien le reste de la division euclidienne de $A\,(\lambda P_1 + \mu P_2)$ par B, autrement dit que

$$\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda R_1 + \mu R_2 = \lambda\,\varphi(P_1) + \mu\,\varphi(P_2)\ .$$

On a ainsi montré la linéarité de φ, qui est donc un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

b. On calcule $\varphi(1) = X - 1$, $\varphi(X) = X^2 - X$, $\varphi(X^2) = X^3 - X^2$, $\varphi(X^3) = -X^3 + X$, d'où la matrice représentant φ dans la base canonique : $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c. Considérons une matrice-colonne $V = (\,a \quad b \quad c \quad d\,)^\top$; le système $MV = 0$ s'écrit

$$\big\{a = 0\ ;\ a - b + d = 0\ ;\ b - c = 0\ ;\ c - d = 0\big\}$$

et se ramène à $\big\{a = 0\ ;\ b = c = d\big\}$. Le noyau de l'endomorphisme φ est donc constitué des polynômes de la forme $bX^3 + bX^2 + bX$: c'est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $X^3 + X^2 + X$.

d. Le sous-espace $\operatorname{Im}\varphi$ est de dimension trois, d'après le théorème du rang ; on peut en construire une base en prenant trois vecteurs-colonnes de la matrice M qui soient linéairement indépendants (on a $\operatorname{rg}\varphi = \operatorname{rg} M = 3$), par exemple $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}(X-1, X^2-X, X^3-X^2)$ en choisissant les trois premières colonnes. Ces trois polynômes admettent effectivement 1 pour racine, d'où l'inclusion $\operatorname{Im}\varphi \subset H$, en posant $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$; mais on a aussi égalité des dimensions car H est un hyperplan de E puisque c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P(1)$ sur E. Donc $\operatorname{Im}\varphi = H$.

---

25. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A + A^{-1} = I_n$. Calculer $A^k + A^{-k}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

- -

Posons $B_k = A^k + A^{-k}$ pour tout k entier naturel. Alors

$$B_k = A^k + A^{-k} = (A^k + A^{-k})(A + A^{-1}) = A^{k+1} + A^{-(k+1)} + A^{k-1} + A^{-(k-1)} = B_{k+1} + B_{k-1} .$$

Partant de $B_0 = 2I_n$ et $B_1 = I_n$, on obtient $B_k = \lambda_k\, I_n$, où la suite de scalaires (λ_k) est définie par la relation de récurrence linéaire d'ordre deux:

$$\lambda_0 = 2 \quad ; \qquad \lambda_1 = 1 \quad ; \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad \lambda_{k+2} = \lambda_{k+1} - \lambda_k .$$

L'équation caractéristique de cette récurrence linéaire est $r^2 - r + 1 = 0$, qui admet deux racines distinctes, qui sont des complexes conjugués $r_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \overline{r_1} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Il existe donc deux constantes (complexes a priori) C et D telles que, pour tout k, on ait $\lambda_k = C\, r_1^k + D\, r_2^k$. Avec les valeurs connues de λ_0 et λ_1, on trouve $C = D = 1$. Donc

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad A^k + A^{-k} = \lambda_k\, I_n \quad \text{avec} \quad \lambda_k = \frac{(1+i\sqrt{3})^k + (1-i\sqrt{3})^k}{2^k} .$$

Remarque. On peut exprimer les λ_k différemment puisque $r_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $r_2 = \overline{r_1} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, donc

$$\lambda_k = e^{i\frac{k\pi}{3}} + e^{-i\frac{k\pi}{3}} = 2\,\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) , \qquad \text{donc} \qquad A^k + A^{-k} = 2\,\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) I_n .$$

La suite (λ_k) est périodique de période 6, de valeurs $(2, 1, -1, -2, -1, 1, \cdots)$.

---

26. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $I_n + A$ soit inversible. On pose $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

a. Montrer que $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$.

b. Montrer que $I_n + B$ est inversible et exprimer A en fonction de B.

- -

a. Les matrices $I_n - A$ et $I_n + A$ commutent car $(I_n + A)(I_n - A) = (I_n - A)(I_n + A) = I_n - A^2$. En multipliant cette relation à gauche et à droite par $(I_n + A)^{-1}$, on obtient l'égalité voulue $(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$.

b. $(I_n + A)B = I_n - A$, donc $(I_n + A)(I_n + B) = (I_n + A)B + (I_n + A) = (I_n - A) + (I_n + A) = 2I_n$, donc $I_n + B$ est inversible et $(I_n + B)^{-1} = \dfrac{1}{2}(I_n + A)$. La relation $(I_n + A)B = I_n - A$ s'écrit aussi $A(I_n + B) = I_n - B$, donc $A = (I_n - B)(I_n + B)^{-1}$.

Sommes de sous-espaces vectoriels.

27. Soit E un espace vectoriel, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F, soit G' un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. Démontrer la relation

$$F + G = (F \cap G) \oplus F' \oplus G' \ .$$

- -

On a $F = (F \cap G) \oplus F'$ et $G = (F \cap G) \oplus G'$.

• Le sous-espace vectoriel $F + G$ contient les trois sous-espaces $F \cap G$, F' et G', donc il contient leur somme:

$$(F \cap G) + F' + G' \subset F + G \ .$$

• Soit maintenant $x \in F + G$, alors il existe au moins une décomposition $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. On décompose encore : $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in F \cap G$ et $y_2 \in F'$, puis $z = z_1 + z_2$ avec $z_1 \in F \cap G$ et $z_2 \in G'$. Finalement, on a $x = (y_1 + z_1) + y_2 + z_2$, avec $y_1 + z_1 \in F \cap G$, $y_2 \in F'$, $z_2 \in G'$. Avec le point précédent, on conclut

$$F + G = (F \cap G) + F' + G' \ .$$

• Il reste à montrer que cette somme est directe. Supposons $x+y+z = 0_E$ avec $x \in F \cap G$, $y \in F'$, $z \in G'$. On peut écrire $x+y = -z$: ce vecteur appartient à G' (puisque $z \in G'$) donc à G, mais il appartient aussi à F (puisque x et y sont dans F), donc $z \in (F \cap G) \cap G'$, donc $z = 0_E$ (puisque ces deux derniers sous-espaces sont en somme directe). Il reste donc $x + y = 0_E$ avec $x \in F \cap G$ et $y \in F'$, mais ces deux derniers sous-espaces sont aussi en somme directe, donc $x = y = 0_E$. La somme étudiée est donc directe, et

$$F + G = (F \cap G) \oplus F' \oplus G' \ .$$

---

28. Soient $E_1, \cdots, E_m$ et $F_1, \cdots, F_m$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que $\bigoplus_{i=1}^{m} E_i = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ et que $E_i \subset F_i$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. Montrer que $E_i = F_i$ pour tout i.

- -

Il suffit de montrer que $F_i \subset E_i$ pour tout i.

Or, si y_i est un vecteur appartenant à F_i, notons $y_i = \sum_{j=1}^{m} x_j$ sa décomposition suivant la somme directe $E = \bigoplus_{j=1}^{m} E_j$; on a alors, pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, $x_j \in E_j$ donc $x_j \in F_j$; cette écriture est donc aussi la décomposition du vecteur y_i suivant la somme directe $E = \bigoplus_{j=1}^{m} F_j$; par unicité de cette dernière décomposition, on déduit $y_i = x_i \in E_i$ (et $x_j = 0_E$ pour tout $j \neq i$).

---

29. Soient $F_1, \cdots, F_m$ des sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^m F_i = E$. Montrer qu'il existe des sous-espaces $G_1, \cdots, G_m$ de E tels que

$$\bigoplus_{i=1}^m G_i = E \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, m]\!] \quad G_i \subset F_i \ .$$

- -

On va procéder par récurrence sur $m \geq 2$.

• Pour $m = 2$: prenons $G_1 = F_1$, et soit G_2 un supplémentaire de $F_1 \cap F_2$ dans F_2.

On a bien $G_1 \subset F_1$ et $G_2 \subset F_2$. Ensuite, F_1 et G_2 sont en somme directe puisque, si $x \in F_1 \cap G_2$, alors x appartient à F_1 et aussi à F_2 (car il est dans G_2), donc x appartient à $F_1 \cap F_2$ et à F_2, donc x est nul puisque ces deux derniers sous-espaces sont supplémentaires. Enfin, si $x \in E$, comme $E = F_1 + F_2$, on peut décomposer $x = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2$. Puis on redécompose f_2 en $f_2 = f_1' + f_2'$ avec $f_1' \in F_1 \cap F_2$ et $f_2' \in G_2$. Ainsi, $x = (f_1 + f_1') + f_2' \in F_1 + G_2$, on a donc $E = F_1 \oplus G_2 = G_1 \oplus G_2$.

• Supposons la propriété démontrée pour un $m \geq 2$, supposons $E = F_1 + \cdots + F_m + F_{m+1}$. Alors $E = (F_1 + \cdots + F_m) + F_{m+1}$. Par l'hypothèse de récurrence, le s.e.v. $V = F_1 + \cdots + F_m$ peut s'écrire $V = G_1 \oplus \cdots \oplus G_m$ avec $G_i \subset F_i$ pour $i \in [\![1, m]\!]$. Puis, de $E = V + F_{m+1}$, on déduit du cas $m = 2$ étudié ci-dessus qu'il existe $G_{m+1} \subset F_{m+1}$ tel que $E = V \oplus G_{m+1}$. Finalement, $E = (G_1 \oplus \cdots \oplus G_m) \oplus G_{m+1} = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m+1} G_i$ par associativité de la somme directe.

---

30. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient $p_1, \cdots, p_m$ des endomorphismes de E vérifiant les relations

$$p_i \circ p_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^m p_i = \mathrm{id}_E \ .$$

Montrer que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^m \mathrm{Im}\, p_i$. Interpréter géométriquement les p_i.

- -

Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^m p_i = \mathrm{id}_E$, on a déjà $\forall x \in E \quad x = \displaystyle\sum_{i=1}^m p_i(x)$, donc $E = \displaystyle\sum_{i=1}^m \mathrm{Im}\, p_i$.

De plus, $p_i = p_i \circ \mathrm{id}_E = p_i \circ \left(\displaystyle\sum_{j=1}^m p_j\right) = \displaystyle\sum_{j=1}^m p_i \circ p_j = p_i^2$ puisque $p_i \circ p_j$ est nul pour $i \neq j$, donc p_i est un projecteur pour tout i.

Montrons que les sous-espaces $\mathrm{Im}\, p_i$ sont en somme directe : si le vecteur nul se décompose en $0_E = \displaystyle\sum_{i=1}^m x_i$ avec, pour tout i, $x_i \in \mathrm{Im}\, p_i$, alors $p_i(x_i) = x_i$ pour tout i (*tout vecteur appartenant à l'image d'un projecteur est invariant par ce projecteur*), et si $i \neq j$, alors $p_j(x_i) = p_j \circ p_i(x_i) = 0_E$, donc pour tout j,

$$0_E = p_j(0_E) = p_j\Big(\sum_{i=1}^m x_i\Big) = \sum_{i=1}^m p_j(x_i) = p_j(x_j) = x_j \ :$$

on a montré que chaque composante de la décomposition est nulle, ce qui prouve que la somme est directe. On a ainsi prouvé que $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i$.

Enfin, soit $x \in E$ se décomposant en $x = \sum_{j=1}^{m} x_j$ avec $x_j \in \operatorname{Im} p_j$ pour tout j. Un calcul analogue à celui fait ci-dessus montre que $p_i(x) = x_i$ pour tout i. Donc p_i est le projecteur sur $\operatorname{Im} p_i$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} \operatorname{Im} p_j$.

---

31. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (avec E de dimension finie) nilpotent, soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.

a. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, il existe un sous-espace vectoriel F_k de E tel que $\operatorname{Ker}(u^k) = \operatorname{Ker}(u^{k-1}) \oplus F_k$.

b. Prouver que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

c. Observer que la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe ci-dessus est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls.

- -

a. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a l'inclusion évidente $\operatorname{Ker}(u^{k-1}) \subset \operatorname{Ker}(u^k)$. Or, tout sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire, il existe donc un supplémentaire F_k de $\operatorname{Ker}(u^{k-1})$ dans $\operatorname{Ker}(u^k)$.

b. Par associativité de la somme directe, on a

$$\begin{array}{rcl} E = \operatorname{Ker}(u^p) & = & \operatorname{Ker}(u^{p-1}) \oplus F_p \\ & = & \big(\operatorname{Ker}(u^{p-2}) \oplus F_{p-1}\big) \oplus F_p \ = \ \operatorname{Ker}(u^{p-2}) \oplus F_{p-1} \oplus F_p \\ & = & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ & = & \operatorname{Ker}(u^0) \oplus F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p \\ & = & F_1 \oplus \cdots \oplus F_p \end{array}$$

puisque $\operatorname{Ker}(u^0) = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E) = \{0_E\}$.

c. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\operatorname{Ker}(u^k) = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$, soit $j \in [\![1, n]\!]$, soit k l'unique entier de $[\![1, p]\!]$ tel que $e_j \in F_k$, alors $e_j \in \operatorname{Ker}(u^k)$, donc $u^k(e_j) = u^{k-1}\big(u(e_j)\big) = 0_E$, soit $u(e_j) \in \operatorname{Ker}(u^{k-1})$, soit $u(e_j) \in F_1 \oplus \cdots \oplus F_{k-1}$, donc $u(e_j)$ est combinaison linéaire de vecteurs e_i avec $i < j$. Si on note $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (m_{i,j})$ la matrice représentant u dans la base $\mathcal{B}$, on a ainsi prouvé que $m_{i,j} = 0$ lorsque $i \geq j$. La matrice M est donc "triangulaire supérieure stricte", i.e. avec des coefficients diagonaux nuls.

Sous-espaces stables.

32. Soit p un projecteur dans un espace vectoriel E, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f et p commutent si et seulement si $\operatorname{Im}(p)$ et $\operatorname{Ker}(p)$ sont stables par f.

- -

L'implication dans le sens direct est du cours: lorsque deux endomorphismes commutent, le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

Supposons $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ stables par f. On sait que $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p = E$ puisque p est un projecteur. Soit donc un vecteur x de E, décomposons-le en $x = y + z$ avec $y = p(x) \in \mathrm{Im}\, p$ et $z \in \mathrm{Ker}\, p$. Alors $(f \circ p)(x) = f\big(p(x)\big) = f(y)$, tandis que $f(x) = f(y) + f(z)$ avec $f(y) \in \mathrm{Im}\, p$ et $f(z) \in \mathrm{Ker}\, p$ puisque ces deux sous-espaces sont stables par f, donc $(p \circ f)(x) = p\big(f(x)\big) = p\big(f(y)\big) = f(y)$ puisque **tout vecteur appartenant à l'image d'un projecteur est invariant par ce projecteur**. On a ainsi prouvé que $f \circ p = p \circ f$. D'où l'équivalence demandée.

33*. Chercher tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ stables par l'opérateur de dérivation $D : P \mapsto P'$.

- -

Notons d'abord que les sous-espaces $\{0\}$, $\mathbb{K}_d[X]$ (pour tout d entier naturel) et $\mathbb{K}[X]$ sont stables par D, puisque l'opérateur de dérivation D diminue le degré des polynômes. Montrons que ce sont les seuls.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ stable par D et non réduit à $\{0\}$. Remarquons que, si un polynôme P non nul, de degré $d \in \mathbb{N}$, appartient à F, alors $\mathbb{K}_d[X] \subset F$: en effet, le s.e.v. F doit contenir les polynômes $P^{(k)} = D^k(P)$ pour tout k de 0 à d, donc F doit contenir le sous-espace engendré par la famille de polynômes $(P, P', P'', \cdots, P^{(d)})$. Or, cette famille de polynômes étant à degrés échelonnés, elle est libre, de cardinal $d+1$ dans $\mathbb{K}_d[X]$ qui est de dimension $d+1$, elle constitue donc une base de $\mathbb{K}_d[X]$. Il y a donc deux cas:

- si l'ensemble $\big\{ \deg(P) \ ; \ P \in F \big\}$ est majoré, c'est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, alors il admet un maximum d, on a alors $F = \mathbb{K}_d[X]$ (les deux inclusions sont immédiates).

- si l'ensemble $\big\{ \deg(P) \ ; \ P \in F \big\}$ n'est pas majoré, alors F contient $\mathbb{K}_d[X]$ pour tout d, donc $F = \mathbb{K}[X]$.

34*. Chercher tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ stables par l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto XP$.

- -

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{K}[X]$ stable par φ. Si $F \neq \{0\}$, alors $\big\{ \deg(P) \ ; \ P \in F \setminus \{0\} \big\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet donc un minimum m. Soit P_0 un polynôme de F de degré m. Les polynômes $X^k P_0 = \varphi^k(P_0)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, appartiennent à F. Par combinaisons linéaires, on a alors $\mathbb{K}[X] \cdot P_0 \subset F$, où $\mathbb{K}[X] \cdot P_0 = \big\{ P_0 Q \ ; \ Q \in \mathbb{K}[X] \big\}$ est l'ensemble des polynômes multiples de P_0. Mais on a aussi l'inclusion inverse: si $P \in F$, posons la division euclidienne de P par P_0, i.e. $P = P_0 Q + R$ avec $\deg(R) < m = \deg(P_0)$, on a $P \in F$, $P_0 Q \in F$ donc, par différence, $R = P - P_0 Q \in F$, mais comme $\deg(R) < m$, cela entraîne $R = 0$ soit $P = P_0 Q \in \mathbb{K}[X] \cdot P_0$. Finalement, $F = \mathbb{K}[X] \cdot P_0$.

Réciproquement, si P_0 est un polynôme non nul, le s.e.v. $\mathbb{K}[X] \cdot P_0$ constitué des polynômes multiples de P_0 est bien stable par φ.

En conclusion, les s.e.v. de $\mathbb{K}[X]$ stables par φ sont $\{0\}$ et les sous-espaces de la forme $\mathbb{K}[X] \cdot P_0$, avec P_0 polynôme non nul.

Matrices par blocs.

35. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $M = \begin{pmatrix} B & A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Déterminer le rang de M en fonction de A et B. Calculer M^{-1} lorsque M est inversible.

- -

• Les opérations élémentaires sur les lignes et colonnes d'une matrice conservent le rang. Or, en effectuant les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i+n}$ $(1 \leq i \leq n)$, puis $C_j \leftarrow C_j - C_{j+n}$ $(1 \leq j \leq n)$, on transforme la matrice $M = \begin{pmatrix} B & A \\ A & A \end{pmatrix}$ en la matrice $M' = \begin{pmatrix} B-A & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$, puis en la matrice $M'' = \begin{pmatrix} B-A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. On a donc

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M') = \mathrm{rg}(M'') = \mathrm{rg}(B-A) + \mathrm{rg}(A)\ .$$

En effet, le lecteur se persuadera facilement de la dernière égalité : je pourrais bien sûr en rédiger une preuve détaillée, mais les sous-bois commencent à regorger de champignons, je préfère donc aller me promener dans la forêt.

• Une matrice carrée d'ordre n est de rang au plus n, et elle est inversible si et seulement si elle est de rang n exactement. On en tire les équivalences :

$$\begin{aligned} M \text{ est inversible} &\iff \mathrm{rg}(M) = 2n \\ &\iff \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B-A) = 2n \\ &\iff \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B-A) = n \\ &\iff A \text{ et } B-A \text{ sont inversibles}\ . \end{aligned}$$

Supposons cette condition réalisée, on recherche alors M^{-1} sous la forme d'une matrice par blocs de même format, c'est-à-dire on pose $N = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, avec X, Y, Z, T matrices carrées d'ordre n, on a alors

$$N = M^{-1} \iff M\,N = I_{2n} \iff \begin{pmatrix} BX+AZ & BY+AT \\ A(X+Z) & A(Y+T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\ .$$

On est donc ramené au "système" $\begin{cases} BX+AZ = I_n & \textbf{(1)} \\ BY+AT = 0 & \textbf{(2)} \\ A(X+Z) = 0 & \textbf{(3)} \\ A(Y+T) = I_n & \textbf{(4)} \end{cases}$. Comme A est inversible, de **(3)**, on tire $X+Z=0$, soit $Z=-X$, et en reportant dans **(1)**, $(B-A)X = I_n$ puis, $B-A$ étant aussi inversible, $X = (B-A)^{-1}$, puis $Z = -(B-A)^{-1}$. De **(4)** avec A inversible, on tire aussi $Y+T = A^{-1}$ donc $T = A^{-1} - Y$ et, en reportant dans **(2)**, on déduit $(B-A)Y = -I_n$, puis $Y = -(B-A)^{-1}$, et enfin $T = A^{-1} + (B-A)^{-1}$. Finalement,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (B-A)^{-1} & -(B-A)^{-1} \\ -(B-A)^{-1} & A^{-1} + (B-A)^{-1} \end{pmatrix}\ .$$

Il y a d'autres expressions possibles de M^{-1}.

36. Soient $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de M en fonction de celui de D.

- -

On a $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{q,p} & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$. Parachutons la matrice inversible $M' = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & I_q \end{pmatrix}$. Alors $MM' = \begin{pmatrix} I_p & B \\ 0_{q,p} & D \end{pmatrix}$ a le même rang que M. Soit maintenant la matrice inversible $M'' = \begin{pmatrix} I_p & -B \\ 0_{q,p} & I_q \end{pmatrix}$. Alors M a le même rang que $MM'M'' = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & D \end{pmatrix}$. Cette dernière matrice a pour rang $p + \mathrm{rg}(D)$ de façon évidente, donc $\mathrm{rg}(M) = p + \mathrm{rg}(D)$.

Remarque. Les matrices M' et M'' sont inversibles par exemple car elles ont respectivement pour inverse $\begin{pmatrix} A & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & I_q \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_p & B \\ 0_{q,p} & I_q \end{pmatrix}$.

---

37. Soient A, B, C, D des matrices carrées d'ordre n.

a. Soit $E = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(E) = \mathrm{rg}(A) \iff \exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad B = AU \ .$$

b. Soit $F = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(F) = \mathrm{rg}(A) \iff \exists V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad C = VA \ .$$

c. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) \iff \exists (U, V) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)^2 \quad M = \begin{pmatrix} A & AU \\ VA & VAU \end{pmatrix} \ .$$

d. On suppose A inversible. Montrer que

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = n \iff D = CA^{-1}B \ .$$

- -

a. Le rang de la matrice E est le rang de la famille de ses vecteurs-colonnes soit, avec des notations faciles à comprendre:

$$\mathrm{rg}(E) = \mathrm{rg}\big(C_1(E), \cdots, C_{2n}(E)\big) = \mathrm{rg}\big(C_1(A), \cdots, C_n(A), C_1(B), \cdots, C_n(B)\big) \ .$$

De même, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\big(C_1(A), \cdots, C_n(A)\big)$. On a donc les équivalences

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(E) = \mathrm{rg}(A) &\iff \forall j \in [\![1, n]\!] \quad C_j(B) \in \mathrm{Vect}\big(C_1(A), \cdots, C_n(A)\big) \\ &\iff \forall j \in [\![1, n]\!] \quad C_j(B) \in \mathrm{Im}(A) \\ &\iff \mathrm{Vect}\big(C_1(B), \cdots, C_n(B)\big) \subset \mathrm{Im}(A) \\ &\iff \mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A) \ . \end{aligned}$$

Donc, s'il existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = AU$, alors clairement $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A)$, donc $\mathrm{rg}(E) = \mathrm{rg}(A)$.

Inversement, si $\mathrm{rg}(E) = \mathrm{rg}(A)$, alors les vecteurs $C_k(B)$, avec $1 \leq k \leq n$, sont dans $\mathrm{Im}(A)$, ils sont donc combinaisons linéaires des vecteurs $C_1(A)$, $\cdots$, $C_n(A)$, il existe donc des scalaires $u_{j,k}$, avec $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$, tels que $C_k(B) = \sum_{j=1}^{n} u_{j,k} C_j(A)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, soit

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad b_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} u_{j,k}\ ,$$

soit $B = AU$ avec $U = (u_{j,k}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque. Plus généralement, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$,alors

$$\mathrm{rg}\,(\,A \quad B\,) = \mathrm{rg}(A) \iff \mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A) \iff \exists U \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \quad B = AU\ .$$

b. Il suffit d'appliquer le **a.** à la transposée de F:

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(F) \quad &\iff \quad \mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(F^\top) \\ &\iff \quad \exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad C^\top = A^\top U \\ &\iff \quad \exists V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad C = VA\ . \end{aligned}$$

Remarque. Plus généralement, si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, alors

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \mathrm{rg}(A) \iff \exists V \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \quad C = VA\ .$$

c. Comme le rang d'une matrice extraite d'une matrice M est toujours inférieur au rang de M, on a $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}\,(\,A \quad B\,) \leq \mathrm{rg}(M)$, puis avec les questions **a.** et **b.**,

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) \quad &\iff \quad \begin{cases} \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}\,(\,A \quad B\,) \\ \mathrm{rg}\,(\,A \quad B\,) = \mathrm{rg}(A) \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} \exists V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad (\,C \quad D\,) = V\,(\,A \quad B\,) \\ \exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad B = AU \end{cases} \\ &\iff \quad \exists (U,V) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)^2 \quad \begin{cases} C = VA \\ B = AU \\ D = VAU \end{cases}. \end{aligned}$$

d. Par hypothèse, ici, $\mathrm{rg}(A) = n$. Posons toujours $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

• Si $\mathrm{rg}(M) = n$, alors d'après **c.**, il existe U et V carrées d'ordre n telles que $B = AU$, $C = VA$ et $D = VAU$. Alors $CA^{-1}B = (VA)A^{-1}(AU) = VAU = D$.

• Si $D = CA^{-1}B$, alors en posant $U = A^{-1}B$ et $V = CA^{-1}$, on a $B = AU$ et $C = VA$, puis $D = (VA)A^{-1}(AU) = VAU$, donc $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) = n$ d'après **c.**

Trace.

38. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice donnée. On considère l'application $\varphi_A : M \mapsto M + \mathrm{tr}(M) \cdot A$.

a. Montrer que φ_A est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. À quelle condition sur la matrice A l'endomorphisme φ_A est-il un automorphisme ? Préciser alors la bijection réciproque φ_A^{-1}.

c. Dans le cas où φ_A n'est pas bijectif, préciser $\mathrm{Ker}\,\varphi_A$ et $\mathrm{Im}\,\varphi_A$.

- -

a. Facile (résulte de la linéarité de la trace).

b. Notons que, si une matrice M appartient au noyau de φ_A, alors M est colinéaire à A, on en déduit l'inclusion $\mathrm{Ker}\,\varphi_A \subset \mathrm{Vect}(A)$. Par ailleurs, $\varphi_A(A) = \big(1 + \mathrm{tr}(A)\big)\,A$. On en déduit que :

- si $\mathrm{tr}(A) = -1$, (alors A n'est pas la matrice nulle), on a $\mathrm{Ker}(\varphi_A) = \mathrm{Vect}(A)$, c'est une droite vectorielle, donc φ_A n'est pas un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

- si $\mathrm{tr}(A) \neq -1$, alors $\mathrm{Ker}(\varphi_A) = \{0\}$, donc φ_A est injectif, et c'est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisqu'on est en dimension finie.

Supposons maintenant $\mathrm{tr}(A) \neq -1$, soit N une matrice donnée, cherchons l'expression de la matrice $M = (\varphi_A)^{-1}(N)$, c'est-à-dire de l'unique matrice M telle que $M + \mathrm{tr}(M)\,A = N$. Cette relation entraîne $\big(1 + \mathrm{tr}(A)\big)\,\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(N)$, ce qui détermine $\mathrm{tr}(M)$ et, en reportant, on déduit

$$\forall N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad (\varphi_A)^{-1}(N) = N - \frac{\mathrm{tr}(N)}{1 + \mathrm{tr}(A)}\,A\;.$$

c. Si φ_A n'est pas un automorphisme, autrement dit si $\mathrm{tr}(A) = -1$, on sait déjà que $\mathrm{Ker}(\varphi_A) = \mathrm{Vect}(A)$, c'est une droite vectorielle. Par le théorème du rang, on déduit que $\mathrm{Im}(\varphi_A)$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or, un calcul immédiat montre que, pour toute matrice M, on a $\mathrm{tr}\big(\varphi_A(M)\big) = 0$, d'où l'inclusion $\mathrm{Im}(\varphi_A) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. Or, l'ensemble $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ des matrices de trace nulle est aussi un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle ; on a donc l'égalité des dimensions, d'où $\mathrm{Im}(\varphi_A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

---

39. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On considère des projecteurs $p_1, \cdots, p_k$ de E et on suppose que $p = \sum_{i=1}^{k} p_i$ est aussi un projecteur. Montrer que $\mathrm{Im}\,p = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Im}\,p_i$ (*utiliser la trace*). En déduire que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$.

- -

Puisque $p(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i(x)$ pour tout x de E, on a $\mathrm{Im}\,p \subset \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}\,p_i$. On a donc en particulier :

$$\dim \mathrm{Im}\,p \leq \dim\left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}\,p_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \dim \mathrm{Im}\,p_i\;. \qquad \text{(*)}$$

Rappelons que, lorsque q est un projecteur de E, on a $\mathrm{rg}\,q = \mathrm{tr}\,q$. Nous obtenons donc ici, par linéarité de la trace:

$$\dim \operatorname{Im} p = \operatorname{rg} p = \operatorname{tr} p = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{tr} p_i = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rg} p_i = \sum_{i=1}^{k} \dim \operatorname{Im} p_i$$

Il en résulte que les deux inégalités de **(*)** sont en fait des égalités :

• $\dim \operatorname{Im} p = \dim \left(\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} p_i \right)$ ce qui prouve que $\operatorname{Im} p = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} p_i$, puisque l'on connaît une inclusion entre ces deux sous-espaces.

• $\dim \left(\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} p_i \right) = \sum_{i=1}^{k} \dim \operatorname{Im} p_i$ ce qui prouve que les s.e.v. $\operatorname{Im} p_i$ sont en somme directe.

En résumé :

$$\operatorname{Im} p = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Im} p_i \ .$$

Soient alors $x \in E$ et $j \in [\![1, k]\!]$. Le vecteur $p_j(x)$ appartient à $\operatorname{Im} p$, donc est invariant par p (propriété classique des projecteurs) : on a donc

$$p_j(x) = p(p_j(x)) = \sum_{i=1}^{k} p_i(p_j(x)) \ .$$

L'unicité de la décomposition de $p_j(x)$ suivant les $\operatorname{Im} p_i$ montre alors que $p_i(p_j(x)) = 0_E$ dès que $i \neq j$. Autrement dit $p_i \circ p_j = 0$ dès que $i \neq j$.

---

40. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

a. Montrer qu'il existe des matrices-colonnes $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = U\,V^\top$.

b. En déduire que $A^2 = \operatorname{tr}(A)\,A$.

c. On suppose que $\operatorname{tr}(A) \neq -1$. Montrer que $I_n + A$ est inversible et exprimer $(I_n + A)^{-1}$ comme combinaison linéaire de I_n et de A.

- -

a. Les colonnes $C_1, \cdots, C_n$ de la matrice A sont toutes colinéaires, soit j_0 un indice pour lequel $C_{j_0} \neq 0$, alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe un scalaire λ_j tel que $C_j = \lambda_j\, C_{j_0}$. En posant $L = (\, \lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_n \,) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, on a alors $A = C_{j_0}\, L$, soit encore $A = U\,V^\top$, où $U = C_{j_0}$ et $V = L^\top$ sont des matrices-colonnes.

b. Alors $A^2 = UV^\top UV^\top = U(V^\top U)V^\top$, mais $V^\top U$ est un scalaire qui n'est autre que la trace de A: en effet, en posant $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, on voit que le coefficient d'indices (i, j) de la matrice $A = UV^\top$ est $a_{i,j} = u_i v_j$, puis

$$V^\top U = (\, v_1 \quad \cdots \quad v_n \,) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \operatorname{tr}(A) \ .$$

Donc $A^2 = \operatorname{tr}(A)\, UV^\top = \operatorname{tr}(A)\, A$.

c. Posons $B = I_n + A$, soit $A = B - I_n$. On a $A^2 = \mathrm{tr}(A)\,A$ ou $(B-I_n)^2 - \mathrm{tr}(A)\,(B-I_n) = 0$, et en développant, on obtient

$$B^2 - \big(2+\mathrm{tr}(A)\big)\,B + \big(1+\mathrm{tr}(A)\big)\,I_n = 0\ ,$$

et si $\mathrm{tr}(A) \neq -1$, cela peut s'écrire $BC = I_n$ avec $C = \dfrac{1}{1+\mathrm{tr}(A)}\,\Big(\big(2+\mathrm{tr}(A)\big)\,I_n - B\Big)$, ce qui entraîne que la matrice $B = I_n + A$ est inversible et que son inverse est C, soit

$$(I_n + A)^{-1} = I_n - \frac{1}{1+\mathrm{tr}(A)}\,A$$

après simplifications.

---

41. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on suppose qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^q = I_n$. Soit alors $B = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} A^k$.

a. Calculer AB, puis B^2.

b. Montrer l'égalité $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(A - I_n)$.

c. En déduire l'égalité $\dim\big(\mathrm{Ker}(A-I_n)\big) = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{tr}(A^k)$.

- -

a. On a $AB = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=1}^{q} A^k = B + \dfrac{1}{q}(A^q - A^0) = B$ puisque $A^q = A^0 = I_n$. Puis $A^j B = B$ pour tout entier j par récurrence. Donc $B^2 = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{j=0}^{q-1} A^j B = \dfrac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} B = B$. Ainsi, B est une matrice de projecteur.

b. On a donc $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(B - I_n)$, propriété connue des projecteurs. Il reste à démontrer que $\mathrm{Ker}(B-I_n) = \mathrm{Ker}(A-I_n)$.

Si $X \in \mathrm{Ker}(A-I_n)$, alors $AX = X$, puis $A^k X = X$ pour tout k, puis $BX = \dfrac{1}{q}(qX) = X$, donc $X \in \mathrm{Im}(B)$.

Inversement, si $X \in \mathrm{Im}(B)$, alors $BX = X$ (car B représente un projecteur), puis $ABX = AX$, mais comme $AB = B$, on a donc $BX = AX = X$ et $X \in \mathrm{Ker}(A - I_n)$.

On a ainsi $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(A - I_n)$.

c. Le rang d'un projecteur est égal à sa trace, donc

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(A-I_n)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(B)\big) = \mathrm{rg}(B) = \mathrm{tr}(B) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{tr}(A^k)$$

par linéarité de la trace.

Matrices semblables.

42.a. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit u un endomorphisme de E commutant avec tous les automorphismes de E :

$$\forall s \in \mathrm{GL}(E) \qquad s \circ u = u \circ s\ .$$

En utilisant des symétries vectorielles, montrer que, pour tout vecteur x de E, les vecteurs x et $u(x)$ sont colinéaires. En déduire que u est une homothétie.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que la seule matrice semblable à A soit la matrice A elle-même (on a $P^{-1}AP = A$ pour toute matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$). Montrer que A est une **matrice scalaire** ($A = \lambda I_n$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$).

- -

a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec tous les automorphismes de E. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, soit H un (hyperplan) supplémentaire de la droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(x)$, soit enfin s la symétrie par rapport à D parallèlement à H. De $s \circ u = u \circ s$, on déduit que le vecteur $u(x)$ est invariant par s, donc est colinéaire à x.

Pour tout $x \in E$ non nul, il existe donc un (unique) scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$. On va montrer que ce scalaire λ_x en fait ne dépend pas de x. *C'est aussi l'exercice* **9.a.**
Soient x et y deux vecteurs non nuls de E. Montrons que $\lambda_x = \lambda_y$ en distinguant deux cas :

• Le couple (x, y) est libre. On écrit alors :

$$u(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

et on en déduit $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

• Le couple (x, y) est lié. Il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $y = \mu x$ (car $x \neq 0$) et on a :

$$\lambda_y y = u(y) = \mu u(x) = \mu\lambda_x x = \lambda_x y \ \text{ d'où } \ \lambda_x = \lambda_y \ \ (\text{car } \ y \neq 0)\ .$$

On a finalement prouvé $\quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \ \ \forall x \in E \quad u(x) = \lambda x$, ce qui signifie que $u = \lambda\, \mathrm{id}_E$: u est une homothétie.

b. On a $PA = AP$ pour toute matrice inversible P, ce qui traduit exactement que l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A commute avec tous les automorphismes de $\mathbb{K}^n$, donc est une homothétie d'après la question **a.**, d'où A est une matrice scalaire.

---

43. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_4$. Montrer que M est semblable à $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- -

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice M. On a donc $f^2 = -\,\mathrm{id}_E$. Il s'agit de prouver qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E dans laquelle f est représenté par la matrice A. Cherchons à construire une telle base.

Soit e_1 un vecteur non nul de E, soit $e_2 = u(e_1)$, alors $u(e_2) = -e_1$ et la famille (e_1, e_2) est libre: en effet, si a et b sont des réels tels que **(1):** $ae_1 + be_2 = 0_E$, alors en appliquant u, on obtient **(2):** $ae_2 - be_1 = 0_E$. La combinaison linéaire $a\times(\mathbf{1}) - b\times(\mathbf{2})$ donne $(a^2+b^2)e_1 = 0_E$ d'où $a^2+b^2 = 0$, ce qui entraîne $a = b = 0$ (car a et b sont réels). Soit le plan $P = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

Soit e_3 un vecteur de E n'appartenant pas au plan P, soit $e_4 = u(e_3)$. Alors $u(e_4) = -e_3$, et la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E. En effet, si **(1):** $ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = 0_E$ avec a, b, c, d réels, en appliquant u, on déduit **(2):** $ae_2 - be_1 + ce_4 - de_3 = 0_E$, et la combinaison linéaire $c\times(\mathbf{1}) - d\times(\mathbf{2})$ donne

$$(ac+bd)e_1 + (ad-bc)e_2 + (c^2+d^2)e_3 = 0_E$$

donc $(c^2+d^2)e_3 \in P$ et, comme $e_3 \notin P$, cela entraîne $c^2+d^2 = 0$, donc $c = 0$ et $d = 0$, il reste alors $ae_1 + be_2 = 0_E$, donc $a = 0$ et $b = 0$ puisque l'on sait déjà que la famille (e_1, e_2) est libre. Ainsi, $\mathcal{B}$ est libre, et est donc une base de E, et on a facilement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$.

Formes linéaires et hyperplans.

44. Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit F un sous-espace de dimension p avec $p < n$. Montrer que l'on peut écrire F comme une intersection de $n-p$ hyperplans de E. Est-il possible d'écrire F comme une intersection de k hyperplans de E avec $k < n-p$?

- -

• Soit $(e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n)$ une base de E adaptée à F. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, soit φ_k la k-ème forme linéaire coordonnée sur E relativement à la base $\mathcal{B}$, i.e. l'application de E vers $\mathbb{K}$ qui, à tout vecteur x se décomposant en $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ dans la base $\mathcal{B}$, associe sa k-ème coordonnée x_k. Chaque φ_k est une forme linéaire sur E, non nulle puisque $\varphi_k(e_k) = 1$. Les sous-espaces $H_k = \mathrm{Ker}(\varphi_k)$ sont donc des hyperplans de E. Et $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p) = H_{p+1} \cap \cdots \cap H_n$ est une intersection de $n-p$ hyperplans.

• La réponse est non: en effet, une intersection de k hyperplans est de dimension au moins $n-k$, on le montre par récurrence (finie) sur k.

- pour $k = 1$, un hyperplan est de dimension $n-1$;

- soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, supposons prouvé que toute intersection de k hyperplans est de dimension au moins $n-k$, soit $F = H_1 \cap \cdots \cap H_k \cap H_{k+1}$ une intersection de $k+1$ hyperplans. Posons $G = H_1 \cap \cdots \cap H_k$, alors $\dim(G) \geq n-k$ d'après l'hypothèse de récurrence, et $F = G \cap H_{k+1}$. Par la formule de Grassmann,

$$\dim(F) = \dim(G) + \dim(H_{k+1}) - \dim(G + H_{k+1}) \geq (n-k) + (n-1) - n = n - (k+1)\ ,$$

ce qui achève la récurrence. *On a utilisé le fait que $G + H_{k+1}$ est un s.e.v. de E, donc sa dimension est majorée par n.*

• Autre méthode pour le deuxième point: il s'agit de montrer que, si $H_1, \cdots, H_k$ sont des hyperplans de E, alors $\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_k) \geq n-k$. Chaque hyperplan H_i est le noyau d'une forme linéaire non nulle φ_i $(1 \leq i \leq k)$. Considérons l'application $\Phi : E \to \mathbb{K}^k$ telle que $\forall x \in E \quad \Phi(x) = \big(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_k(x)\big)$. La preuve de la linéarité de Φ est évidente, *un enfant de quatre ans comprendrait cela. Allez donc me chercher un enfant de quatre ans!* (Groucho Marx, dans *La soupe au canard, 1933*). De plus, $\mathrm{Ker}(\Phi) = H_1 \cap \cdots \cap H_k$. Le théorème du rang appliqué à Φ donne

$$\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_k) = \dim(\operatorname{Ker}\Phi) = \dim(E) - \operatorname{rg}(\Phi) = n - \dim(\operatorname{Im}\Phi) \geq n - k$$

puisque $\operatorname{Im}(\Phi) \subset \mathbb{K}^k$ et donc $\operatorname{rg}(\Phi) \leq k$.

---

45. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $\operatorname{tr}(AE_{i,j})$, où $E_{i,j}$ est une matrice élémentaire. Montrer que toute forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de la forme $\tau_A : M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$, où A est une matrice fixée. *On montrera pour cela que l'application $A \mapsto \tau_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big)$.*

- -

Pour tout couple $(k,l) \in [\![1,n]\!]$, le coefficient d'indices (l,k) de la matrice-élément $E_{i,j}$ est $\delta_{i,l}\delta_{j,k}$, où δ représente le symbole de Kronecker. Calculons les coefficients diagonaux de la matrice-produit $AE_{i,j}$:

$$\begin{aligned}
\big(AE_{i,j}\big)_{k,k} &= \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}\,(E_{i,j})_{l,k} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \delta_{i,l}\,\delta_{j,k}\,a_{k,l} \\
&= \delta_{j,k} \sum_{l=1}^{n} \delta_{i,l}\,a_{k,l} \;=\; \delta_{j,k}\,a_{k,i}\;.
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{tr}(AE_{i,j}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{j,k}\,a_{k,i} = a_{j,i}$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notons τ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$ qui, à toute matrice M, associe le scalaire $\tau_A(M) = \operatorname{tr}(AM)$. Cette application est linéaire (*conséquence de la linéarité de la trace*), c'est donc une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, autrement dit un élément de l'espace vectoriel $F = \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big)$. De plus, l'application $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to F$, $A \mapsto \tau_A$ est aussi linéaire: en effet, $\tau_{\lambda A+\mu B} = \lambda\,\tau_A + \mu\,\tau_B$ puisque, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\tau_{\lambda A+\mu B}(M) = \operatorname{tr}\big((\lambda A + \mu B)M\big) = \lambda\operatorname{tr}(AM) + \mu\operatorname{tr}(BM) = \lambda\,\tau_A(M) + \mu\,\tau_B(M)\;.$$

Mais T est injective puisque, si $A \in \operatorname{Ker}(T)$, on a $\tau_A = 0$, donc pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AM) = 0$ et en particulier $\operatorname{tr}(AE_{i,j}) = 0$ pour tout couple (i,j), donc $a_{j,i} = 0$ pour tout couple (i,j) d'après le calcul fait plus haut, ainsi tous les coefficients de la matrice A sont nuls, et $A = 0$.

Enfin, les espaces vectoriels de départ et d'arrivée de l'application linéaire T ont la même dimension n^2, donc T est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, T est surjective, et cela répond à la question posée.

---

46. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient $n+1$ réels distincts $a_0, a_1, \cdots, a_n$.

a. On fixe $i \in [\![0,n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $L_i(a_i) = 1$ et $L_i(a_j) = 0$ pour tout $j \neq i$. Expliciter ce polynôme L_i sous forme factorisée. *On aura ainsi $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$, symbole de Kronecker, pour tout couple (i,j). Ces polynômes L_i sont les polynômes d'interpolation de Lagrange.*

b. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n, on ait la relation

$$\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, P(a_i)\ .$$

On pourra considérer les formes linéaires φ_i sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ définies par $\varphi_i(P) = P(a_i)$, ainsi φ_i est la "forme d'évaluation au point a_i". On montrera que ces formes linéaires φ_i $(0 \le i \le n)$ constituent une base de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E.

c. Exprimer les λ_i sous forme d'intégrale en utilisant les polynômes L_i. Expliciter les polynômes L_i et les coefficients λ_i dans le cas $n = 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = 1$.

- -

a. Ceci est un résultat du programme, détaillons toutefois!

Analyse. Si un tel polynôme L_i existe, il doit avoir pour racines tous les réels a_j, $j \neq i$, soit n réels distincts, ce polynôme est donc factorisable par le produit des $(X - a_j)$ avec $j \neq i$. Donc $L_i = \left(\prod\limits_{j \neq i}(X - a_j)\right) Q$, où Q est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Comme $\deg(L_i) \le n$, le polynôme Q est constant, notons-le λ (on identifie les polynômes constants et les scalaires). En évaluant au point a_i, on a enfin $1 = L_i(a_i) = \lambda \prod\limits_{j \neq i}(a_i - a_j)$. On a donc nécessairement (unicité):

$$L_i = \prod_{j \neq i} \left(\frac{X - a_j}{a_i - a_j} \right)\ .$$

Synthèse. Réciproquement, le polynôme L_i explicité ci-dessus convient: il est de degré n exactement donc appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, il admet tous les a_j $(j \neq i)$ pour racines, et on a bien $L_i(a_i) = 1$.

Remarque 1. En utilisant la relation $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$, il est facile de montrer que la famille $(L_0, \cdots, L_n)$ est libre, et donc qu'elle constitue une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque 2. Si on se donne aussi $n+1$ réels $b_0, \cdots, b_n$ (non nécessairement distincts), il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$: en effet, le polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k L_k$ convient d'où l'existence. Si deux polynômes P et Q vérifiaient cette condition, alors le polynôme $P - Q$ serait de degré au plus n et admettrait $n+1$ racines, d'où $P - Q = 0$ et l'unicité.

b. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, l'application $\varphi_i : E \to \mathbb{R}$, $P \mapsto \varphi_i(P) = P(a_i)$ est une forme linéaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$. Ces formes linéaires sont indépendantes puisque, si l'on avait une relation de dépendance linéaire $\sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_j = 0$, en l'appliquant au polynôme L_i pour un $i \in [\![0, n]\!]$ donné, on obtiendrait

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_j(L_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_i(a_j) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \delta_{i,j} = \lambda_i$$

et les coefficients λ_i sont donc tous nuls. La famille $(\varphi_0, \cdots, \varphi_n)$ étant de cardinal $n+1$ dans l'espace vectoriel $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ de dimension $n+1$, elle constitue alors une base de cet espace vectoriel.

Enfin, l'application $\Phi : E \to \mathbb{R}$, $P \mapsto \Phi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$ est aussi une forme linéaire sur E, donc un élément de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Cet élément se décompose alors de façon unique dans la base $(\varphi_0, \cdots, \varphi_n)$, autrement dit il existe un unique $(n+1)$-uplet de réels $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)$ tel que $\Phi = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \varphi_i$, soit

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad \Phi(P) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \varphi_i(P) \ , \quad \text{soit} \quad \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(a_i) \ .$$

c. Fixons un indice $j \in [\![0, n]\!]$. En prenant $P = L_j$ dans la relation ci-dessus, on a

$$\int_0^1 L_j(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_j(a_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \delta_{j,i} = \lambda_j \ .$$

En changeant les notations, on a $\lambda_i = \displaystyle\int_0^1 L_i(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout i.

Avec $a_0 = 0$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = 1$ (et $n = 2$), les polynômes de Lagrange L_0, L_1, L_2 se calculent par la formule obtenue en **a.**, soit

$$L_0 = \frac{(X - a_1)\,(X - a_2)}{(a_0 - a_1)\,(a_0 - a_2)} = \frac{\left(X - \frac{1}{2}\right)(X - 1)}{\left(0 - \frac{1}{2}\right)(0 - 1)} = 2X^2 - 3X + 1 \ ;$$

$$L_1 = \frac{(X - a_0)\,(X - a_2)}{(a_1 - a_0)\,(a_1 - a_2)} = \frac{(X - 0)\,(X - 1)}{\left(\frac{1}{2} - 0\right)\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = -4X^2 + 4X \ ;$$

$$L_2 = \frac{(X - a_0)\,(X - a_1)}{(a_2 - a_0)\,(a_2 - a_1)} = \frac{(X - 0)\left(X - \frac{1}{2}\right)}{(1 - 0)\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 2X^2 - X \ .$$

On calcule alors $\lambda_0 = \displaystyle\int_0^1 L_0(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}$, $\lambda_1 = \displaystyle\int_0^1 L_1(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$ et $\lambda_2 = \displaystyle\int_0^1 L_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}$. Ainsi, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\,P(0) + \frac{2}{3}\,P\Big(\frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{6}P(1) \ .$$

Remarque. Cette dernière égalité, exacte pour des fonctions polynomiales de degré au plus 2, devient approchée pour une fonction f quelconque (une estimation de l'erreur peut être obtenue à l'aide du maximum de $|f^{(3)}|$ si f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,1]$, en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange). En subdivisant l'intervalle, on obtient ainsi la **méthode de Simpson** pour les calculs approchés d'intégrales, méthode basée sur l'interpolation de degré deux (alors que la **méthode des trapèzes**, un peu moins performante, repose sur l'**interpolation linéaire**, c'est-à-dire de degré un).

Polynômes d'endomorphismes et de matrices.

47. Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale. Quels sont ses polynômes annulateurs ? Parmi ses polynômes annulateurs non nuls, préciser celui qui est unitaire de degré minimal.

- -

Des calculs faciles montrent que $D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k)$ pour tout k entier naturel, puis $P(D) = \mathrm{diag}\big(P(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_n)\big)$ si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme quelconque.

On en déduit qu'un polynôme P annule la matrice D si et seulement si P admet tous les λ_k $(1 \leq k \leq n)$ comme racines. Mais **attention!**, les λ_k n'étant pas supposés distincts, ne pas en déduire trop vite que P est divisible par le polynôme $P_1 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$.

En effet, en posant $\mathrm{Sp}(D) = \{\lambda_k \ ; \ 1 \leq k \leq n\}$ (les 5/2 comprendront cette notation, il s'agit du **spectre** de D) l'ensemble des coefficients diagonaux de D, la condition nécessaire et suffisante sur le polynôme P est qu'il soit multiple du polynôme $P_0 = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(D)} (X - \lambda)$.

Je précise un peu la différence entre P_0 et P_1: l'indexation du produit par l' **ensemble** $\mathrm{Sp}(D)$ *des coefficients diagonaux de D fait qu'on élimine les "doublons", i.e. si un même coefficient λ apparaît plusieurs fois sur la diagonale de D, le facteur $X - \lambda$ apparaît une seule fois dans P_0 alors qu'il apparaîtrait plusieurs fois dans le polynôme P_1. Le polynôme P_0 est donc "scindé à racines simples". En prenant par exemple* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, *on a $P_1 = (X-1)^2(X-2)(X-3)$, mais $\mathrm{Sp}(D) = \{1; 2; 3\}$ et $P_0 = (X-1)(X-2)(X-3)$. Les polynômes annulateurs de D sont alors exactement les multiples de ce dernier polynôme P_0.*

Le polynôme annulateur unitaire (de coefficient dominant 1) de degré minimal (parmi les polynômes annulateurs non nuls) est ce polynôme $P_0 = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(D)} (X - \lambda)$. On dit que c'est le **polynôme minimal** de la matrice D.

---

48. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une relation de dépendance linéaire entre les matrices I_3, A et A^2. En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

- -

On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. On recherche deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$, on trouve $\alpha = 2$ et $\beta = 8$, on a donc la relation de dépendance linéaire $A^2 = 2A + 8I_3$, autrement dit $P = X^2 - 2X - 8$ est un polynôme annulateur de la matrice A.

Le reste R_n de la division euclidienne de X^n par P est un polynôme de degré strictement inférieur à 2, il est donc de la forme $R_n = a_n X + b_n$: on écrit alors l'identité de la division euclidienne sous la forme

$$X^n = (X^2 - 2X - 8)\, Q_n(X) + a_n X + b_n \;. \qquad \textbf{(*)}$$

Par ailleurs, on note que $P = (X-4)(X+2)$; en évaluant l'identité **(*)** pour $X = 4$ et $X = -2$ (racines de P), on obtient les deux équations

$$\begin{cases} -2a_n \ + \ b_n = \ (-2)^n \\ \ \ 4a_n \ + \ b_n = \ 4^n \end{cases} \quad , \qquad \text{d'où} \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{4^n - (-2)^n}{6} \\[2mm] b_n = \dfrac{2 \times (-2)^n + 4^n}{3} \end{cases} .$$

En substituant la matrice A à l'indéterminée X dans la relation **(*)**, et tenant compte de $P(A) = A^2 - 2A - 8I_3 = 0$, on obtient

$$A^n = R_n(A) = a_n A + b_n I_3 = \frac{4^n - (-2)^n}{6}\, A + \frac{2 \times (-2)^n + 4^n}{3}\, I_3$$

ou, sous forme de tableau matriciel, et après quelques simplifications :

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + (-2)^n & 0 & -4^n + (-2)^n \\ 0 & 2 \times (-2)^n & 0 \\ -4^n + (-2)^n & 0 & 4^n + (-2)^n \end{pmatrix} .$$

---

49. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^n pour n entier naturel.

b. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Donner une expression simple de la matrice $P(A)$.

c. Quels sont les polynômes annulateurs de la matrice A ?

- -

a. Ecrivons $A = 2I_3 + N$, où la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice trois : en effet, $N^2 = 12\, E_{1,3}$ et $N^3 = 0$. Les matrices $2I_3$ et N commutent, ce qui permet de calculer A^n par la formule du binôme de Newton : pour $n \geq 2$,

$$A^n = (2I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} N^k = 2^n I_3 + n 2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2 \ ,$$

donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n\,2^{n+1} & 3n(n-1)\,2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 3n\,2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 4n\,2^{n-1} & 6n(n-1)\,2^{n-2} \\ 0 & 2^n & 3n\,2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Remarquons que les expressions obtenues restent valables pour $n = 0$ et $n = 1$, certains coefficients de la matrice étant alors nuls.

b. Soit un polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$; alors

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k 2^k & 4\displaystyle\sum_{k=1}^{d} k a_k 2^{k-1} & 6\displaystyle\sum_{k=2}^{d} k(k-1) a_k 2^{k-2} \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k 2^k & 3\displaystyle\sum_{k=1}^{d} k a_k 2^{k-1} \\ 0 & 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k 2^k \end{pmatrix}.$$

On reconnaît alors $P(A) = \begin{pmatrix} P(2) & 4P'(2) & 6P''(2) \\ 0 & P(2) & 3P'(2) \\ 0 & 0 & P(2) \end{pmatrix}$.

c. $P(A)$ est la matrice nulle si et seulement si $P(2) = P'(2) = P''(2) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si 2 est racine triple (au moins) du polynôme P, ou encore si et seulement si $(X-2)^3 \mid P$.

---

50. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exprimer simplement $P(aI_n + J)$, pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. *On pourra utiliser la formule de Taylor polynomiale.*

- -

On a $P(aI_n + J) = Q(J)$ avec $Q(X) = P(X+a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$, où $d = \deg(P)$.

Donc $P(aI_n + J) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}\, J^k$. Or, il est classique que les puissances de J s'obtiennent en décalant successivement la diagonale de coefficients 1, jusqu'à avoir $J^{n-1} = E_{1,n}$, et enfin $J^n = 0$, donc $J^k = 0$ pour $k \geq n$. On a donc

$$P(aI_n+J)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}\,J^k=\begin{pmatrix} P(a) & P'(a) & \dfrac{P''(a)}{2} & \cdots & \dfrac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \\ & P(a) & P'(a) & & \vdots \\ & & P(a) & \ddots & \vdots \\ & (0) & & \ddots & P'(a) \\ & & & & P(a) \end{pmatrix}.$$

---

51. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit $u\in\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $(x_0,u(x_0),\cdots,u^{n-1}(x_0))$ soit libre. Montrer que les endomorphismes commutant avec u sont exactement les polynômes en u.

- -

Notons $\mathcal{C}(u)$ le commutant de u, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u, et notons $\mathbb{K}[u]=\big\{P(u)\ ;\ P\in\mathbb{K}[X]\big\}$ l'ensemble des polynômes en u. L'inclusion $\mathbb{K}[u]\subset\mathcal{C}(u)$ est toujours vraie, c'est connu.

Ici, il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $\mathcal{B}=(x_0,u(x_0),\cdots,u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. Soit v un endomorphisme de E commutant avec u, décomposons dans la base $\mathcal{B}$ le vecteur $v(x_0)$: il existe des scalaires a_0, a_1, $\cdots$, a_{n-1} tels que

$$v(x_0)=a_0x_0+a_1u(x_0)+\cdots+a_{n-1}u^{n-1}(x_0)\ .$$

Cela peut s'écrire $v(x_0)=P(u)(x_0)$, avec $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k\in\mathbb{K}[X]$.

Soit $j\in[\![0,n-1]\!]$. Comme v commute avec u^j, on a

$$v\big(u^j(x_0)\big)=u^j\big(v(x_0)\big)=u^j\Big(\sum_{k=0}^{n-1}a_ku^k(x_0)\Big)=\sum_{k=0}^{n-1}a_ku^k\big(u^j(x_0)\big)=P(u)\ \big(u^j(x_0)\big)\ .$$

Ainsi, les endomorphismes v et $P(u)$ coïncident sur tous les vecteurs d'une base de E, donc $v=P(u)$. On a prouvé l'inclusion $\mathcal{C}(u)\subset\mathbb{K}[u]$.

Finalement, $\mathcal{C}(u)=\mathbb{K}[u]$.

52*. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on suppose qu'il admet un polynôme annulateur $P\in\mathbb{K}[X]$, non nul. Montrer que u est injectif si et seulement s'il est surjectif.

- -

• Supposons u injectif. Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{d}a_kX^k\in\mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul annulant u, notons m sa "valuation", c'est-à-dire $m=\min\{k\in\mathbb{N}\mid a_k\neq0\}$, c'est aussi la multiplicité de la racine 0 dans P. On a alors $P=X^m\,Q$ avec $Q=a_m+a_{m+1}X+\cdots+a_dX^{d-m}$ vérifiant $Q(0)=a_m\neq0$. La relation $0=P(u)=u^m\circ Q(u)$ entraîne $Q(u)=0$ car u est injectif: en effet, pour tout vecteur x de E, on a $0_E=P(u)(x)=u^m\big(Q(u)(x)\big)$, et u^m est injectif, donc $Q(u)(x)=0_E$.

Pour tout vecteur x de E, on a donc $0_E = a_m x + a_{m+1}u(x) + \cdots + a_d u^{d-m}(x)$, ce qui permet d'écrire

$$x = -\frac{1}{a_m}\big(a_{m+1}u(x)+\cdots+a_d u^{d-m}(x)\big) = u(y)\ ,\quad \text{avec}\quad y = -\frac{1}{a_m}\big(a_{m+1}x+\cdots+a_d u^{d-m-1}(x)\big)\ ,$$

et ceci prouve la caractère surjectif de u.

- Supposons u surjectif. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul annulant u,

notons toujours m sa "valuation", soit $m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$, on a ainsi $P = a_m X^m + a_{m+1}X^{m+1} + \cdots + a_d X^d$ avec $a_m \neq 0$.

Si un vecteur $x \in E$ vérifie $u(x) = 0_E$ alors, comme u^m est surjectif, il existe $y \in E$ tel que $x = u^m(y)$. On a d'autre part $P(u)(y) = 0_E$, soit $a_m x + a_{m+1}u(x) + \cdots + a_d u^{d-m}(x) = 0_E$, soit $a_m x = 0_E$, puis $x = 0_E$ car le coefficient a_m est non nul. On a prouvé le caractère injectif de u.

Exercices avec Python.

53. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La **centro-transposée** de A est la matrice $\widehat{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de coefficients $\widehat{a}_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}$. On note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $(m_{i,j})$, avec $m_{i,j} = \delta_{j,n+1-i}$ (symbole de Kronecker).

a. Écrire une fonction `J(n)` retournant la matrice J_n.

b. Écrire une fonction `randmatrix(n,p)` retournant une matrice pseudo-aléatoire de taille (n,p), à coefficients entiers dans $[\![0,100]\!]$. Utiliser cette fonction pour conjecturer le rapport entre J_n et la centro-transposition $A \mapsto \widehat{A}$. Justifier mathématiquement le résultat conjecturé.

c. Écrire une fonction `centro(A)` retournant la centro-transposée de la matrice A.

d. Montrer les relations $\widehat{AB} = \widehat{A}\,\widehat{B}$, $\widehat{A^{-1}} = (\widehat{A})^{-1}$ si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\widehat{A^\top} = (\widehat{A})^\top$.

e. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{C}^+ = \big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \widehat{A} = A\big\}$ et $\mathcal{C}^- = \big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \widehat{A} = -A\big\}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et écrire une fonction `decomp(A)` qui retourne les composantes de A dans la décomposition $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{C}^+ \oplus \mathcal{C}^-$.

---

54. Pour $n \geq 2$, on considère la matrice $M(n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée "en serpent" par les entiers de 1 à n^2, ainsi $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$.

a. Écrire une fonction `f(n,i,j)` retournant le coefficient d'indices (i,j) de la matrice $M(n)$.

b. Écrire une fonction `M(n)` retournant la matrice $M(n)$.

c. Avec Python, afficher le rang de $M(n)$ pour $n \in [\![2,10]\!]$. Faire une conjecture, et la démontrer.

d. Afficher les valeurs de $\dfrac{\mathrm{tr}\big(M(n)\big)}{n^3}$ pour n de 2 à 100. Commenter.

e. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer $\min\limits_{1 \leq j \leq n} \big(M(n)\big)_{i,j}$ et $\max\limits_{1 \leq j \leq n} \big(M(n)\big)_{i,j}$. En déduire un équivalent de $\mathrm{tr}\big(M(n)\big)$.

- -

a. *cf.* script.

b. *cf.* script.

c. *cf.* script. On conjecture que $\mathrm{rg}\,\big(M(n)\big) = 2$ pour tout $n \geq 2$... et on le prouve! En effet, on peut observer que les colonnes C_1 et C_n sont non proportionnelles, donc $\mathrm{rg}\,\big(M(n)\big) \geq 2$, et que, pour tout j, on a la relation

$$C_j = \frac{1}{n-1}\,\big((n-j)\,C_1 + (j-1)\,C_n\big)\ .$$

Les colonnes appartiennent donc toutes au plan vectoriel engendré par C_1 et C_n, donc $\mathrm{rg}\,\big(M(n)\big) \leq 2$.

d. *cf.* script. Il semblerait que $\dfrac{\mathrm{tr}\big(M(n)\big)}{n^3}$ tende vers $\dfrac{1}{2}$, autrement dit que $\mathrm{tr}\big(M(n)\big) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n^3}{2}$.

e. Sur la ligne i, le plus petit coefficient est $(i-1)n + 1$, le plus grand est in.

Donc $(i-1)n \leq m_{i,i} \leq in$ pour tout i. En sommant, on obtient un encadrement de la trace:

$$n^2\,\frac{(n-1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} i(n-1) \leq \sum_{i=1}^{n} \big(i(n-1)+1\big) \leq \mathrm{tr}\big(M(n)\big) \leq \sum_{i=1}^{n} in = n^2\,\frac{(n+1)}{2}\ ,$$

d'où on déduit l'équivalent $\mathrm{tr}\big(M(n)\big) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n^3}{2}$.