COLLES de MATHÉMATIQUES **PSI2 2024-2025**

Semaine 4 : du 07/10 au 11/10

Algèbre linéaire

Le programme de la semaine dernière, et plus particulièrement: matrices de passage et changements de base, trace d'une matrice ou d'un endomorphisme, polynômes d'endomorphismes ou de matrices.

Révisions d'analyse et début du calcul intégral

Notion de fonction continue par morceaux (c.p.m.) sur un segment, sur un intervalle quelconque. Propriétés de l'intégrale d'une fonction c.p.m. sur un segment. Changement de variable et intégration par parties, sommes de Riemann.

Rappel du lien entre intégrales et primitives dans le cas des fonctions continues ("théorème fondamental de l'analyse"). Étude de fonctions de la forme $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Notion de convergence d'une intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, avec $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux, $I = [a, b[$ ou $]a, b]$ ou $]a, b[$. Notion d'intégrale convergente en a, en b. Propriétés. Si $0 \leq f \leq g$ et si l'intégrale de g est convergente, alors l'intégrale de f est convergente.

Exemples de référence $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$, $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

Calculs d'intégrales généralisées, utilisant éventuellement des changements de variable ou des intégrations par parties.

Ne sont pas encore exigibles: la convergence absolue, le terme de fonction intégrable, les critères de convergence utilisant des comparaisons locales aux bornes.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Si $H = \operatorname{Ker}\varphi$ avec φ forme linéaire non nulle sur E, et si $a \in E \setminus H$, alors $E = H \oplus \operatorname{Vect}(a)$.
- Matrices de passage, effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.
- Si deux endomorphismes commutent, le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.
- Trace d'un projecteur.
- Existence d'un polynôme annulateur non nul pour une matrice carrée.
- Étude de la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ ou de $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.