DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 2

PSI2 2024-2025 **Durée : 4 heures** **05/10/2024**

PROBLÈME 1

Ce problème étudie diverses propriétés des matrices nilpotentes. Les différentes parties sont assez largement indépendantes.

I. Trace d'une matrice nilpotente

On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **nilpotente** s'il existe un entier naturel k tel que $A^k = 0_n$ (matrice nulle).

Dans toute cette partie, on note A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ supposée nilpotente.

1. Montrer l'existence d'un plus petit entier naturel p tel que $A^p = 0_n$, et justifier que $p \in \mathbb{N}^*$.

L'entier $p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid A^k = 0_n\}$ mentionné dans la question **1.** est appelé **indice de nilpotence** de la matrice A.

2. Supposons A nilpotente d'indice p.

- **a.** Justifier qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $A^{p-1}X \neq 0$, puis montrer que la famille de vecteurs $(X, AX, A^2X, \cdots, A^{p-1}X)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- **b.** En déduire que $A^n = 0_n$. Quelle inégalité peut-on écrire entre les entiers p et n ?

3. On suppose toujours A nilpotente d'indice p avec $p \in \mathbb{N}^*$, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice A. Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, on pose $N_k = \operatorname{Ker}(u^k)$.

- **a.** Montrer que, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $N_{k-1} \subset N_k$, cette inclusion étant stricte.
- **b.** Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on note S_k un supplémentaire de N_{k-1} dans N_k. Prouver que
$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{k=1}^{p} S_k \ .$$
- **c.** Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, prouver l'inclusion $u(S_k) \subset N_{k-1}$.
- **d.** Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{K}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbb{K}^n = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_p$, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de u relativement à cette base $\mathcal{B}$. En notant $d_1, \cdots, d_p$ les dimensions respectives de $S_1, \cdots, S_p$, donner l'allure de la matrice M (*on écrira cette matrice par blocs en précisant les dimensions des blocs, et en précisant quels blocs doivent nécessairement être nuls*). Que valent les coefficients diagonaux de la matrice M ?

4. Prouver que toute matrice nilpotente est de trace nulle.

II. Sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes.

Dans cette partie, on souhaite montrer qu'une matrice est de trace nulle si et seulement si on peut l'écrire comme combinaison linéaire de matrices nilpotentes. Soit
$$T = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$$
l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la trace est nulle. Soit N le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes, c'est-à-dire l'ensemble des matrices que l'on peut écrire comme combinaisons linéaires de matrices nilpotentes.

Pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant un coefficient 1 à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne, les autres coefficients étant nuls.

5. Montrer que T est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et préciser sa dimension.

6. Pour $j \in [\![2, n]\!]$, on pose $F_j = E_{1,1} + E_{1,j} - E_{j,1} - E_{j,j}$ et $G_j = E_{1,1} - E_{j,j}$.

a. Calculer F_j^2.

b. En déduire que $G_j \in N$.

7. Montrer que la famille constituée des matrices élémentaires $E_{i,j}$ avec $i \neq j$, et des matrices G_j avec $2 \leq j \leq n$, est libre.

8. En déduire que $N = T$.

III. Recherche de racines carrées.

9. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

a. Trouver une matrice-colonne $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et une matrice-ligne $L \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ telles que $A = CL$. En déduire que A est nilpotente d'indice 2.

b. Montrer que A est semblable à la matrice élémentaire $E_{2,1}$.

c. Soit $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que $R^2 = E_{2,1}$, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $E_{2,1}$ et ρ celui associé à la matrice R. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont stables par ρ.

d. En déduire que les matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = E_{2,1}$ sont nécessairement de la forme $R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & d \\ e & 0 & f \end{pmatrix}$ avec a, b, c, d, e, f réels.

e. Déterminer toutes les matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = E_{2,1}$.

f. En déduire comment obtenir toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$. *On ne demande pas ici un calcul explicite.*

10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice p. Montrer que, si $2p - 1 > n$, alors il n'existe aucune matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^2 = A$.

IV. Une condition suffisante pour qu'une matrice soit nilpotente.

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on suppose qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = AB - BA$. On souhaite montrer que A est nilpotente.

11. Montrer que, pour tout k entier naturel, $A^k B - BA^k = k\, A^k$.

On introduit l'endomorphisme φ_B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \varphi_B(M) = MB - BM\ .$$

On a donc $\varphi_B(A^k) = k\, A^k$ pour tout entier naturel k.

12. On suppose que la matrice A n'est pas nilpotente.

a. Montrer, par récurrence sur m que, pour tout m entier naturel, la famille $(I_n, A, \cdots, A^m)$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b. Conclure cette partie.

PROBLÈME 2

On rappelle les résultats suivants:

- si k et n sont deux entiers naturels avec $0 \leq k \leq n$, alors $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$;

- par convention, $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$;

- la formule de Pascal: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$;

- la formule du binôme de Newton: si $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Dans ce problème, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels ou complexes, on lui associe une suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \ .$$

I. Deux exemples élémentaires

1. Cas d'une suite constante. Dans cette question, on suppose que (a_n) est une suite constante de valeur α avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Calculer a_n^* pour tout n entier naturel.

2. Cas d'une suite géométrique. Dans cette question, on se donne un nombre complexe z et on suppose que $a_n = z^n$ pour tout n entier naturel.

a. Exprimer a_n^* pour tout n.

b. On suppose ici que $|z| < 1$. Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n^*$ sont convergentes et calculer leur somme.

c. Décrire et représenter graphiquement, dans le plan complexe, l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n^*$ converge.

d. On suppose ici que $z = e^{i\theta}$ avec θ réel et $0 < |\theta| < \pi$. Exprimer à l'aide de $\cos\dfrac{\theta}{2}$ et $\sin\dfrac{\theta}{2}$ la partie réelle et la partie imaginaire de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$.

II. Comparaison des convergences des deux suites

Dans cette partie et la suivante, la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée à valeurs réelles.

3.a. Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, donner un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers l'infini.

b. En déduire la limite de $\dfrac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers l'infini.

4. Pour q et n entiers naturels avec $n > q$, on pose
$$S_q(n,a) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k} a_k \, .$$
Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_q(n,a)$, avec $q \in \mathbb{N}$ fixé.

5. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n^* = 0$.

6. On suppose que la suite (a_n) admet une limite réelle l. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n^* = l$.

7. La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

III. Comparaison des convergences des deux séries

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^*$ et $U_n = 2^n\, T_n$.

8. Pour $n \in [\![0,3]\!]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des S_k avec $k \leq n$, c'est-à-dire sous la forme $U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k$, les coefficients $\lambda_{n,k}$ étant à déterminer.

9. Au vu de la question **8.**, à quelle expression de U_n sous la forme $U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k$ peut-on s'attendre pour n entier naturel quelconque ?

10. Prouver par récurrence sur n la formule conjecturée.
On pourra utiliser le fait que $a_n = S_n - S_{n-1}$ en posant éventuellement $S_{-1} = 0$.

11. On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Montrer alors que la série $\sum a_n^*$ converge et trouver une relation simple entre les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$.

12. La convergence de la série $\sum a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum a_n^*$?