CORRIGÉ du DS de MATHÉMATIQUES numéro 2
PSI2 2024-2025

PROBLÈME 1

I. Trace d'une matrice nilpotente

1. L'ensemble $U = \{k \in \mathbb{N} \mid A^k = 0_n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet donc un minimum p. Comme $A^0 = I_n \neq 0_n$, on voit que $0 \notin U$ donc $p \geq 1$, i.e. $p \in \mathbb{N}^*$.

2.a. Comme $p-1 \notin U$, on a $A^{p-1} \neq 0_n$, il existe donc $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^{p-1}X \neq 0$.

Par exemple, il existe au moins une colonne de A^{p-1}, disons la j-ième, qui n'est pas le vecteur nul, le vecteur $X = E_j$ (j-ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) vérifie alors $AE_j = C_j(A) \neq 0$.

Supposons la famille $(X, AX, \cdots, A^{p-1}X)$ liée, il existe alors des scalaires $\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1}$ **<u>non tous nuls</u>** tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k A^k X = 0$. Si on pose $m = \min\left\{k \in [\![0, p-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0\right\}$, alors $\displaystyle\sum_{k=m}^{p-1} \lambda_k A^k X = 0$ et, en multipliant à gauche par A^{p-1-m}, il reste seulement $\lambda_m A^{p-1}X = 0$, ce qui est absurde puisque le scalaire λ_m est non nul et le vecteur $A^{p-1}X$ est aussi non nul. On en déduit que la famille est libre.

b. On dispose donc d'une famille libre de cardinal p dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui est de dimension n, on en déduit que $p \leq n$. Comme $A^p = 0_n$, alors $A^n = A^p A^{n-p} = 0_n$.

3.a. Soit $k \in [\![1, p]\!]$. De $u^k = u \circ u^{k-1}$, on déduit l'inclusion $N_{k-1} = \mathrm{Ker}(u^{k-1}) \subset \mathrm{Ker}(u^k) = N_k$.

L'endomorphisme u est aussi nilpotent d'indice p, i.e. $u^{p-1} \neq 0$ et $u^p = 0$. Il existe donc un vecteur x de $\mathbb{K}^n$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$, et bien sûr $u^p(x) = 0$. Soit $y = u^{p-k}(x)$, on constate que $u^{k-1}(y) = u^{p-1}(x) \neq 0$ et $u^k(y) = u^p(x) = 0$, on a donc exhibé un vecteur de N_k qui n'est pas dans N_{k-1}, d'où l'inclusion stricte.

b. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $N_k = N_{k-1} \oplus S_k$.

L'idée est que, comme $N_0 = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}) = \{0\}$ et $N_p = \mathrm{Ker}(0) = \mathbb{K}^n$, partant de

$$\mathbb{K}^n = N_p = N_{p-1} \oplus S_p = (N_{p-2} \oplus S_{p-1}) \oplus S_p = \cdots ,$$

par "associativité de la somme directe", on aboutit à $\mathbb{K}^n = S_1 \oplus \cdots \oplus S_p$.

On peut rédiger en montrant, par récurrence finie sur $k \in [\![1, p]\!]$, que $N_k = S_1 \oplus \cdots \oplus S_k$.

- Initialisation: pour $k = 1$, $N_1 = N_0 \oplus S_1 = \{0\} \oplus S_1 = S_1$, c'est ce que l'on voulait obtenir.

- Hérédité: si c'est vrai au rang k avec $1 \leq k \leq p-1$, i.e. alors $N_{k+1} = (S_1 \oplus \cdots \oplus S_k) \oplus S_{k+1}$, donc déjà par associativité de la somme (*non supposée directe*):

$$N_{k+1} = \left(\sum_{i=1}^{k} S_i\right) + S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} S_i \ .$$

Et si l'on suppose $x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1} = 0$ avec $x_i \in S_i$ $(1 \leq i \leq k+1)$, on a alors $0 = (x_1 + \cdots + x_k) + x_{k+1}$, le premier terme étant dans $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} S_i = \bigoplus_{i=1}^{k} S_i = N_k$ (*hypothèse de récurrence*), le deuxième dans S_{k+1} et ces deux sous-espaces sont en somme directe donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i = 0$ et $x_{k+1} = 0$. Enfin, les sous-espaces $S_1, \cdots, S_k$ étant en somme directe (*hypothèse de récurrence aussi*), de $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i = 0$, on déduit que tous les x_i sont nuls. Donc les sous-espaces $S_1, \cdots, S_k, S_{k+1}$ sont encore en somme directe.

La récurrence étant achevée, pour $k = p$, on obtient la réponse à la question.

c. Si $y \in u(S_k)$, alors il existe $x \in S_k$ tel que $y = u(x)$, mais S_k étant inclus dans N_k, on a alors $u^k(x) = 0$, soit $u^{k-1}(y) = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker}(u^{k-1}) = N_{k-1}$. L'inclusion est démontrée.

d. On peut écrire $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 + \cdots + \mathcal{B}_p$, où le symbole $+$ représente ici la concaténation des familles de vecteurs (*que l'on manipule comme des listes en informatique*), chaque $\mathcal{B}_k$, $1 \leq k \leq p$, étant une base de S_k. La question **c.** ci-dessus montre que les vecteurs de la base $\mathcal{B}_k$ ont leur image dans $N_{k-1} = S_1 \oplus \cdots \oplus S_{k-1}$, donc qui est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_{k-1}$. Sur les d_k colonnes correspondantes, seuls les $d_1 + \cdots + d_{k-1}$ premiers coefficients peuvent être non nuls. La matrice M aura donc l'aspect suivant:

$$M = \begin{pmatrix} 0_{d_1} & & & (*) \\ & 0_{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0_{d_p} \end{pmatrix} .$$

C'est une matrice "triangulaire supérieure par blocs", les blocs diagonaux étant eux-mêmes des matrices nulles carrées d'ordres $d_1, \cdots, d_p$.

Les termes diagonaux de M sont donc nuls.

4. On vient de montrer que toute matrice A nilpotente est semblable à une matrice M triangulaire supérieure "stricte", i.e. dont les coefficients diagonaux aussi sont nuls. Comme la trace est un invariant de similitude, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(M) = 0$.

II. Sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes

5. L'application "trace" $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et T est son noyau, c'est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, i.e. un sous-espace vectoriel de dimension $n^2 - 1$.

6.a. Par la règle des dominos, on obtient

$$\begin{aligned} F_j^2 &= (E_{1,1} + E_{1,j} - E_{j,1} - E_{j,j})(E_{1,1} + E_{1,j} - E_{j,1} - E_{j,j}) \\ &= E_{1,1} + E_{1,j} - E_{1,1} - E_{1,j} - E_{j,1} - E_{j,j} + E_{j,1} + E_{j,j} \;=\; 0_n \;. \end{aligned}$$

b. Donc F_j est nilpotente et $F_j \in N$. Comme $E_{1,j}$ et $E_{j,1}$ sont elles aussi nilpotentes (d'indice deux), la matrice $G_j = F_j - E_{1,j} + E_{j,1}$ est une combinaison linéaire de matrices nilpotentes, donc $G_j \in N$.

7. Soient $\alpha_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j)$ et β_k $(2 \leq k \leq n)$ des scalaires tels que

$$\sum_{i \neq j} \alpha_{i,j} E_{i,j} + \sum_{k=2}^{n} \beta_k G_k = 0_n \;.$$

En examinant le coefficient en position (i, j) avec $i \neq j$, on obtient $\alpha_{i,j} = 0$ et, en examinant le coefficient en position (k, k) avec $k \in [\![2, n]\!]$, on obtient $\beta_k = 0$. La famille est donc libre.

8. Les matrices $E_{i,j}$ avec $i \neq j$ étant nilpotentes, il existe donc dans le sous-espace N une famille libre de cardinal $(n^2 - n) + (n - 1) = n^2 - 1$, donc $\dim(N) \geq n^2 - 1$. Comme la question **4.** prouve l'inclusion $N \subset T$, on a aussi $\dim(N) \leq \dim(T) = n^2 - 1$. Donc $\dim(N) = n^2 - 1$ et enfin, par une inclusion et l'égalité des dimensions, on conclut que $N = T$.

On a bien montré que les matrices de trace nulle sont exactement celles qu'il est possible d'écrire comme combinaisons linéaires de matrices nilpotentes.

III. Recherche de racines carrées

9.a. On observe que $A = CL$ avec $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $L = (1 \quad 3 \quad -7) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$. Donc $A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = 0$ puisque $LC = 1 \times 1 + 2 \times 3 + 1 \times (-7) = 0$ (c'est un scalaire).

b. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représenté par la matrice A, i.e. $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$, où $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Notons que $\text{rg}(u) = \text{rg}(A) = 1$, que $\text{Im}(u) = \text{Im}(A)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $e_1 + 2e_2 + e_3$ (*première colonne de la matrice* A), et que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(A)$ est le plan d'équation cartésienne $x + 3y - 7z = 0$.

Notons aussi que la relation $A^2 = 0_3$ ou $u^2 = 0$ entraîne $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$.

On cherche à construire une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui se traduit par $\begin{cases} u(\varepsilon_1) &= \varepsilon_2 \\ u(\varepsilon_2) &= 0 \\ u(\varepsilon_3) &= 0 \end{cases}$. On doit donc choisir ε_2 dans $\text{Im}(u)$, par exemple $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, en rechercher un antécédent $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ satisfaisant donc l'équation $x + 3y - 7z = 1$, le vecteur $\varepsilon_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ fait l'affaire, et compléter (ε_2) en une base $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\text{Ker}(u)$, et $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient pour cela. Il est alors immédiat de vérifier que la famille $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ ainsi construite est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = E_{2,1}$.

Le cours indique que l'on a alors la relation $A = PE_{2,1}P^{-1}$ avec $P = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, les matrices A et $E_{2,1}$ sont donc semblables.

c. Si $R^2 = E_{2,1}$, alors $\rho^2 = f$ donc ρ et f commutent, il en résulte que $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont stables par ρ.

d. Comme $\text{Im}(f) = \text{Vect}(e_2)$ est stable par ρ, il doit exister un réel c tel que $\rho(e_2) = ce_2$, ce qui signifie que la deuxième colonne de R est de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_2, e_3)$ est stable par ρ, les vecteurs $\rho(e_2)$ et $\rho(e_3)$ sont combinaisons linéaires de e_2 et e_3, donc le premier coefficient de la troisième colonne est aussi nul.

La matrice R est donc nécessairement de la forme demandée.

e. En posant $R=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & d \\ e & 0 & f \end{pmatrix}$, on calcule $R^2=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ ba+bc+de & c^2 & cd+df \\ ea+ef & 0 & f^2 \end{pmatrix}$ et on identifie avec la matrice $E_{2,1}$, on obtient

$$\Big\{a=c=f=0\ ;\ de=1\ ;\ \text{aucune condition sur } b\Big\}\ .$$

Les “racines carrées” de la matrice $E_{2,1}$ sont donc les matrices de la forme $R=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & \dfrac{1}{e} \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec b réel et e réel non nul.

f. Si $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a, en reprenant la matrice de passage P introduite en **b.**:

$$M^2=A \iff M^2=PE_{2,1}P^{-1} \iff P^{-1}M^2P=E_{2,1} \iff (P^{-1}MP)^2=E_{2,1}\ .$$

Les racines carrées M de la matrice A sont donc les matrices de la forme $M=PRP^{-1}$, où R est une racine carrée de la matrice $E_{2,1}$, soit $M=P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & \dfrac{1}{e} \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $b\in\mathbb{R}$ et $e\in\mathbb{R}^*$.

10. On a par hypothèse $A^{p-1}\neq 0_n$ et $A^p=0_n$. S'il existe $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^2=A$, alors $M^{2p}=A^p=0_n$ donc M est nilpotente, et il résulte alors de la question **2.b.** que $M^n=0_n$. Mais, de l'inégalité $2p-1>n$, on tire $2p-2\geq n$ (car ce sont des entiers), donc $M^{2p-2}=0_n$, soit $A^{p-1}=0_n$, ce qui est absurde.

La matrice A n'admet donc pas de racine carrée.

IV. Une condition suffisante pour qu'une matrice soit nilpotente

11. Par récurrence sur k: c'est immédiat pour $k=0$, c'est l'hypothèse de l'énoncé pour $k=1$ et, si c'est vrai à un rang $k\in\mathbb{N}$ donné, alors

$$A^{k+1}B-BA^{k+1}=A\left(A^kB-BA^k\right)+(AB-BA)\,A^k=A\cdot kA^k+A\cdot A^k=(k+1)A^{k+1}\ ,$$

ce qui achève la récurrence.

12.a. La propriété à démontrer est vraie au rang 0, i.e. la famille (I_n) est libre.

Si, pour un m donné, la famille $(I_n,A,\cdots,A^m)$ est libre, montrons que $(I_n,A,\cdots,A^m,A^{m+1})$ est encore libre. Si ce n'était pas le cas, on aurait alors $A^{m+1}\in\mathrm{Vect}(I_n,A,\cdots,A^m)$, il existerait donc des scalaires α_0, $\cdots$, α_m tels que **(1):** $A^{m+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\alpha_kA^k$.

En appliquant φ_B, on obtient la relation **(2):** $(m+1)A^{m+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}k\alpha_k\,A^k$.

La combinaison linéaire $(m+1)\times(\mathbf{1})-(\mathbf{2})$ donne $0_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(m+1-k)\alpha_kA^k$. Comme la famille $(I_n,A,\cdots,A^m)$ est libre, il en résulte que les $(m+1-k)\alpha_k$ sont nuls, puis que les α_k sont nuls, donc $A^{m+1} = 0_n$ ce qui est contraire à l'hypothèse faite. La famille $(I_n, A, \cdots, A^m, A^{m+1})$ est donc libre, et la récurrence est achevée.

b. Ce que l'on obtenu en **a.** est impossible puisque, dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension n^2, une famille libre est nécessairement de cardinal majoré par n^2. On conclut donc que l'existence d'une matrice B telle que $A = AB - BA$ entraîne la nilpotence de la matrice A.

PROBLÈME 2

I. Deux exemples élémentaires

1. Cas d'une suite constante. Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$, on obtient pour tout n entier, $a_n^* = \displaystyle\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha = \alpha = a_n$.

2. Cas d'une suite géométrique.

a. Toujours avec la formule du binôme,

$$a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = \frac{1}{2^n} (1+z)^n = \left(\frac{1+z}{2}\right)^n,$$

on obtient aussi une suite géométrique, mais de raison $\dfrac{1+z}{2}$.

b. Si $|z| < 1$, alors $\left|\dfrac{1+z}{2}\right| \leq \dfrac{1+|z|}{2} < 1$, les séries géométriques $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ sont donc toutes deux convergentes, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+z}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\dfrac{1+z}{2}} = \frac{2}{1-z}.$$

c. La série $\sum a_n^*$ converge si et seulement si $|1+z| < 2$, soit $\big|z-(-1)\big| < 2$, donc si et seulement si le point M d'affixe z appartient au disque ouvert de centre Ω d'affixe -1 et de rayon 2.

d. On a ici

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+z}{2}\right)^n = \frac{2}{1-z} = \frac{2}{1-e^{i\theta}} = \frac{2\,(1-e^{-i\theta})}{(1-e^{i\theta})\,(1-e^{-i\theta})} \\
&= \frac{2\,(1-\cos\theta + i\,\sin\theta)}{2-2\,\cos\theta} = 1 + i\,\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = 1 + i\,\frac{\cos\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}},
\end{aligned}$$

en utilisant $\sin\theta = 2\,\sin\dfrac{\theta}{2}\,\cos\dfrac{\theta}{2}$ et $1-\cos\theta = 2\,\sin^2\dfrac{\theta}{2}$.

II. Comparaison des convergences des deux suites

3.a. On obtient $\displaystyle \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.

Commentaire: le numérateur est un produit de k (nombre constant) facteurs tous équivalents à n lorsque n tend vers l'infini.

b. Par croissances comparées d'une "suite puissance" $(n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'une suite géométrique, on a

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k!}\,\frac{n^k}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

4. On écrit $\displaystyle S_q(n,a) = \sum_{k=0}^{q} a_k\,\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$, il apparaît ainsi que la suite $\big(S_q(n,a)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire de $q+1$ suites de limite nulle. Par opérations sur les limites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_q(n,a) = 0$.

5. Allons-y pour une démonstration "à la Cesaro"!

Soit donc $\varepsilon > 0$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, il existe un entier q tel que, pour tout $k > q$, on ait $|a_k| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n > q$, on a alors

$$\begin{aligned}
|a_n^*| &= \frac{1}{2^n}\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\right| = \left|S_q(n,a) + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}a_k\right| \\
&\leq \big|S_q(n,a)\big| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}|a_k| \\
&\leq \big|S_q(n,a)\big| + \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k} \\
&\leq \big|S_q(n,a)\big| + \frac{\varepsilon}{2}\,.
\end{aligned}$$

L'entier q étant fixé, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_q(n,a) = 0$, il reste un entier r tel que, pour $n > r$, on ait $\big|S_q(n,a)\big| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n > \max\{q,r\}$, on a alors $|a_n^*| \leq \varepsilon$.

Ceci prouve que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n^* = 0$.

6. Posons $b_n = a_n - l$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. De la question **5.** ci-dessus, on déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n^* = 0$ en posant $\displaystyle b_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k$ pour tout n. Enfin, comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$,

$$a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(b_k + l) = b_n^* + l\,,$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n^* = l$.

7. On vient de montrer que la convergence de la suite (a_n) entraîne la convergence de la suite (a_n^*), avec la même limite.

La réciproque est fausse: l'étude du cas des suites géométriques (question **2.**) montre par exemple que, en posant $a_n = (-1)^n$, la suite (a_n) est divergente mais $a_n^* = 0$ pour tout n, donc la suite (a_n^*) converge.

III. Comparaison des convergences des deux séries

8. Des calculs au brouillon donnent

$$U_0 = S_0\ ; \quad U_1 = 2S_0 + S_1\ ; \quad U_2 = 3S_0 + 3S_1 + S_2\ ; \quad U_3 = 4S_0 + 6S_1 + 4S_2 + S_3\ .$$

On obtient donc la forme cherchée avec $\lambda_{0,0} = \lambda_{1,1} = \lambda_{2,2} = \lambda_{3,3} = 1$, $\lambda_{1,0} = 2$, $\lambda_{2,1} = 3$, $\lambda_{2,0} = 3$, $\lambda_{3,2} = 4$, $\lambda_{3,1} = 6$, $\lambda_{3,0} = 4$.

9. Il semble raisonnable de conjecturer que $\lambda_{n,k} = \binom{n+1}{k+1}$, autrement dit qu'on a la relation

$$(\mathcal{P}_n)\ : \qquad U_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k\ .$$

10. Prouvons $(\mathcal{P}_n)$ par récurrence. L'initialisation est très largement faite puisque la formule est vraie pour $n \in [\![0,3]\!]$.

Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie pour un entier naturel n donné. Alors

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= 2^{n+1}\, T_{n+1} \;=\; 2^{n+1}\,(T_n + a_{n+1}^*) \;=\; 2U_n + 2^{n+1}\, a_{n+1}^* \\
&= 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k \\
&= 2\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (S_k - S_{k-1}) \\
&= 2\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k}\right] S_k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2}{k+1} S_k\ ,
\end{aligned}$$

ca qui prouve $(\mathcal{P}_{n+1})$.

Commentaires: on a utilisé le fait que $\binom{n+1}{n+2} = 0$, *et on a terminé le calcul en utilisant la formule de Pascal.*

11. Supposons la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ convergente, et notons $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$ sa somme. Pour tout n, on a

$$
\begin{aligned}
T_n &= \frac{U_n}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k \\
&= 2\times\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}S_{k-1} \\
&= 2\times\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}X_k \\
&= 2\,X^*_{n+1}
\end{aligned}
$$

en posant $X_0=0$ et $X_k=S_{k-1}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$. La suite (S_n) étant convergente de limite S, par décalage des indices, la suite (X_n) tend aussi vers le même S, puis la question **6.** montre que la suite (X^*_n) converge aussi vers S. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=2S$, i.e. la série $\sum a^*_n$ converge et on a la relation

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a^*_n = 2\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\ .$$

12. On vient de montrer que la convergence de la série $\sum a_n$ entraîne la convergence de la série $\sum a^*_n$.

La réciproque est fausse: le contre-exemple proposé à la question **7.** convient ici aussi: avec $a_n=(-1)^n$, la série $\sum a_n$ diverge (grossièrement) mais la série de terme général $a^*_n=0$ est évidemment convergente.