FONCTIONS INTÉGRABLES

I. Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$.

1. Notion d'intégrale convergente.

Définition. Soit a un réel, soit $f : I = [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Si l'expression $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (définie si $x \in I$) admet une limite finie L lorsque x tend vers $+\infty$, on dit alors que l'**intégrale généralisée** $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **est convergente**, et on pose

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = L = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **est divergente**.

Nous dirons parfois que cette intégrale est **convergente** (ou **divergente**) **en** $+\infty$.

Remarque. On notera que la démarche est analogue à celle adoptée pour définir la convergence d'une série, et à la définition de la somme d'une série convergente comme limite des sommes partielles. Pour harmoniser le vocabulaire, on appellera parfois **intégrales partielles** les intégrales $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $x \in I$. Une différence toutefois dans la présentation: s'il y a deux notations différentes pour désigner une série en tant qu'objet d'étude $\left(\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ et la somme de la série $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ en cas de convergence, ici l'intégrale généralisée en tant qu'objet d'étude et la valeur de cette intégrale en cas de convergence sont représentées par la même notation $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque. On dit parfois **intégrale impropre** au lieu de "intégrale généralisée".

Deux exemples "de référence":

(1): $\boxed{\textbf{Si } \alpha \textbf{ est un réel, l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \textbf{ converge si et seulement si } \alpha > 0.}$

En effet, calculons une intégrale partielle: si $\alpha \neq 0$, $\displaystyle\int_0^x e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\alpha}\,e^{-\alpha t}\right]_0^x = \frac{1 - e^{-\alpha x}}{\alpha}$ et, lorsque x tend vers $+\infty$, cette expression tend vers $+\infty$ si $\alpha < 0$, et vers $\dfrac{1}{\alpha}$ si $\alpha > 0$. Enfin, si $\alpha = 0$, $\displaystyle\int_0^x \mathrm{d}t = x$ diverge. On a bien convergence ssi $\alpha > 0$.

(2): $\boxed{\textbf{Si } \alpha \in \mathbb{R}\textbf{, l'intégrale "de Riemann" } \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \textbf{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$

Même démarche: pour $x \geq 1$, on explicite une intégrale partielle:

- si $\alpha = 1$, alors $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \big[\ln(t)\big]_1^x = \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et l'intégrale diverge ;

- *si* $\alpha \neq 1$, *alors* $\displaystyle\int_1^x t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$, *expression qui, lorsque* x *tend vers* $+\infty$, *tend vers* $+\infty$ *si* $\alpha < 1$, *et tend vers* $\dfrac{1}{\alpha-1}$ *si* $\alpha > 1$, *d'où la conclusion.*

Ce deuxième exemple de référence est l'analogue des séries de Riemann dans le cours sur les séries. Ce n'est pas un hasard si on retrouve la même condition de convergence, cela se retrouve par la technique de comparaison série-intégrale (*cf.* cours sur les séries numériques).

2. <u>Cas des fonctions positives.</u>

On a dans ce cas le théorème suivant:

<u>Théorème.</u> Si f est continue par morceaux et <u>à valeurs positives</u> sur $[a,+\infty[$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si les intégrales partielles $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ sont majorées, pour x décrivant $[a,+\infty[$.

<u>Preuve.</u> Posons $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *pour* $x \in I = [a,+\infty[$. *Alors la fonction* F *est croissante sur* I*: en effet, si* $a \leq x \leq y$, *la relation de Chasles donne*

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[x,y]} f$$

et cette intégrale est positive (positivité de l'intégrale). On dispose alors du théorème de la limite monotone qui dit que F *admet une limite finie en* $+\infty$ *si et seulement si elle est majorée sur* I, *ce que l'on voulait prouver.*

<u>Remarque.</u> **Dans le cas où f est continue sur** I, *alors* F *est la primitive de* f *qui s'annule au point* a, *donc* F *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *avec* $F' = f$, *on peut alors déduire la croissance de* F *du signe de sa dérivée. Mais si* f *est seulement c.p.m., cet argument n'est plus valable.*

<u>Remarque.</u> On a donc un résultat analogue à celui du cours sur les séries, disant qu'**une série <u>à termes positifs</u> converge si et seulement si ses sommes partielles sont majorées.**

Comme pour l'étude des séries, on peut en déduire une première règle de comparaison concernant les intégrales de fonctions positives. D'autres seront énoncées plus loin, après avoir introduit le vocabulaire des fonctions intégrables.

<u>Proposition.</u> Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$. Si on a $0 \leq f \leq g$ sur $[a,+\infty[$, et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

<u>Preuve.</u> Posons $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ *pour* $x \in I$. *L'hypothèse entraîne que* G *est majorée sur* I *(cf. théorème ci-dessus), ainsi il existe* $M \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $\forall x \in I \quad G(x) \leq M$. *De plus, l'inégalité* $f \leq g$ *et la propriété de croissance de l'intégrale impliquent que* $F \leq G$ *sur* I. *La fonction* F *est donc aussi majorée par* M *sur* I, *ce qui entraîne la convergence de l'intégrale* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *en appliquant le même théorème dans l'autre sens.*

Remarque. Dans l'énoncé de cette proposition, il suffit bien sûr que les inégalités $0 \leq f \leq g$ soient satisfaites "pour x assez grand".

Remarque. Il importe de comprendre que, pour montrer la convergence de l'intégrale de la fonction positive f, **c'est l'intégrande** (i.e. la fonction f) **que l'on cherche à majorer, et certainement pas l'intégrale** $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ dont l'existence n'est pas encore prouvée! De même, pour montrer la convergence d'une série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$, **on majore le terme général** u_n **et certainement pas la somme** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ dont l'existence n'est pas encore prouvée.

Exercice I.2.1. Convergence et valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. $\square$

Exercice I.2.2. Nature des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\big(\ln(t)\big)^2}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$. $\square$

Remarque. Ce cours présente de nombreuses analogies avec celui sur les séries, mais on note toutefois quelques différences importantes. Par exemple, pour qu'une série converge, il est **nécessaire** que son terme général tende vers 0. En revanche, pour que l'intégrale d'une fonction c.p.m. sur $[a, +\infty[$ soit convergente, il n'est pas nécessaire que la fonction f tende vers 0 en $+\infty$, mais il faut reconnaître que, pour trouver des contre-exemples, il faut chercher un peu! Imaginez une fonction positive, continue et "affine par morceaux" (i.e. son graphe est constitué d'une succession de segments de droite) sur $[0, +\infty[$, qui soit nulle "la plupart du temps" et qui, au voisinage de chaque point d'abscisse n avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, fasse un petit pic dont l'aire sous la courbe vaille $\dfrac{1}{n^2}$ (par exemple un triangle isocèle de base $\dfrac{1}{2n^2}$ et de hauteur 1), alors f ne tend pas vers 0 à l'infini puisque $f(n) = 1$ pour tout n entier, $n \geq 2$, et l'intégrale de f converge puisque $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice I.2.3. En adaptant légèrement l'exemple ci-dessus, construire une fonction continue positive $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge, mais qui ne soit pas bornée au voisinage de $+\infty$.

II. Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque.

1. Adaptations de la définition.

Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle ouvert ou semi-ouvert de $\mathbb{R}$ (en fait, tout intervalle qui n'est pas un segment), et $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue par morceaux. Notons a la borne inférieure et b la borne supérieure de l'intervalle I. Ce sont a priori des éléments de la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, l'une des bornes ou les deux pouvant être infinie(s). On distingue trois types d'intervalles, selon l'ouverture ou la fermeture des crochets.

a. <u>Cas d'un intervalle semi-ouvert $I = [a, b[$</u>.

Si $I = [a, b[$, alors a est nécessairement un réel, alors que b peut valoir $+\infty$ (cas étudié dans le paragraphe précédent), écrivons donc $-\infty < a < b \leq +\infty$. Pour tout $x \in I = [a, b[$, on peut poser $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On dit alors que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si $F(x)$ admet une limite finie L lorsque x tend vers b par valeurs inférieures. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = L = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

On dit alors que cette intégrale est **convergente en** b, et sinon **divergente en** b.

Dans le paragraphe précédent, on a vu des exemples avec $b = +\infty$, en voici avec b réel:

<u>Exemple 1.</u> L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ converge. *En effet, la fonction* $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ *est continue, donc c.p.m., sur* $[0, 1[$, *et pour* $x \in [0, 1[$, *on calcule l'intégrale partielle* $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = 2\left(1 - \sqrt{1-x}\right)$, *qui tend vers 2 lorsque* $x \to 1^-$. *On écrira donc que*

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = 2\ .$$

<u>Exemple 2.</u> L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ diverge. *En effet, la fonction* $g : t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ *est continue sur* $[0, 1[$, *et pour* $x \in [0, 1[$, *on calcule l'intégrale partielle* $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x)$, *qui tend vers* $+\infty$ *lorsque* $x \to 1^-$, *d'où la divergence.*

b. <u>Cas d'un intervalle semi-ouvert $I =]a, b]$</u>.

On a ici $-\infty \leq a < b < +\infty$. Pour tout $x \in I =]a, b]$, on peut poser $F(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$. On dit alors que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si $F(x)$ admet une limite finie L lorsque x tend vers a par valeurs supérieures. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = L = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

On dit alors que cette intégrale est **convergente en** a, et sinon **divergente en** a.

<u>Remarque.</u> L'"intégrale partielle" $F(x)$ introduite ici, lorsque f est continue, n'est plus une primitive de f, puisqu'on a alors $F' = -f$.

Voici deux exemples "**de référence**":

(3): $\boxed{\textbf{L'intégrale } \displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t \textbf{ est convergente.}}$

En effet, la fonction $\ln$ *est continue sur* $]0, 1]$ *et, pour* $x \in]0, 1]$, $\displaystyle\int_x^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = x - x\ln(x) - 1$. *Comme* $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$, *on a* $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$, *d'où la convergence et la valeur de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$.

(4): $\boxed{\textbf{Si } \alpha \in \mathbb{R}\textbf{, l'intégrale ``de Riemann'' } \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \textbf{ converge si et seulement si } \alpha < 1.}$

Même démarche: pour $x \in]0,1]$, on explicite une intégrale partielle:

- *si $\alpha = 1$, alors* $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \big[\ln(t)\big]_x^1 = -\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, *et l'intégrale diverge ;*
- *si $\alpha \neq 1$, alors* $\displaystyle\int_x^1 t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1-x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, *expression qui, lorsque x tend vers 0, tend vers $+\infty$ si $\alpha > 1$, et tend vers $\dfrac{1}{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$, d'où la conclusion.*

<u>Remarque.</u> Cas des intégrales "faussement généralisées". Si $I =]a,b]$ par exemple, **<u>avec a réel</u>**, si $f :]a,b] \to \mathbb{K}$ est continue, il est possible qu'elle soit **prolongeable par continuité** au point a, c'est-à-dire qu'elle admette une limite finie l à droite au point a. Dans ce cas, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est plus vraiment une intégrale "généralisée" puisqu'on peut l'écrire aussi comme intégrale sur le **segment** $[a,b]$ de la fonction $\widehat{f}$ qui est le prolongement par continuité de f, i.e. $\widehat{f} : [a,b] \to \mathbb{K}$ définie par

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} l & \text{si} \quad x = a \\ f(x) & \text{si} \ \ x \in]a,b] \end{cases} .$$

Cette fonction $\widehat{f}$ est alors continue sur le segment $[a,b]$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} \widehat{f}$.

Idem pour f continue sur $[a,b[$ **<u>avec b réel</u>**, et prolongeable par continuité au point b.

Citons comme exemples $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ que l'on peut considérer comme des intégrales de fonctions continues sur un segment.

<u>Attention!</u> Il serait saugrenu de vouloir "prolonger par continuité" une fonction en $-\infty$ ou en $+\infty$, d'où l'insistance sur le fait que la borne a ou b ci-dessus doit être un réel!

c. <u>Cas d'un intervalle ouvert $I =]a,b[$</u>.

Si $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ est continue par morceaux, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, on introduit un point $c \in]a,b[$, et on dit que **l'intégrale** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont toutes deux convergentes. Si c'est le cas, on pose alors

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

On dit alors parfois que cette intégrale est **convergente en a et en b.**

On admettra que cela (la convergence et la valeur de l'intégrale en cas de convergence) ne dépend pas du choix du point c dans $]a,b[$. *En utilisant la relation de Chasles, le lecteur pourra se convaincre facilement du fait que, si l'on remplace c par un autre point c' de $]a,b[$, la nature et la valeur de l'intégrale sont inchangées. Cela rend légitime cette définition.*

Pour définir une intégrale généralisée sur un intervalle ouvert $]a,b[$, on se ramène donc à deux intervalles semi-ouverts, $]a,c]$ et $[c,b[$. On verra bientôt que l'étude de la nature d'une intégrale nécessite souvent une étude locale de la fonction à intégrer au voisinage des bornes exclues (i.e. là où il y a un crochet ouvert). Une intégrale "doublement généralisée" sur $]a,b[$ se ramène donc à deux intégrales "simplement généralisées" sur $]a,c]$ et $[c,b[$ respectivement.

Exemple 1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est toujours divergente. En effet, il n'existe aucune valeur de α pour laquelle les intégrales sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$ sont toutes deux convergentes.

Exemple 2. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ converge et vaut π. En effet, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. Étudions d'abord l'intégrale sur $[0,1[$: une intégrale partielle est $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \mathrm{Arcsin}(x)$, qui a pour limite $\dfrac{\pi}{2}$ lorsque $x \to 1^-$. Cette première intégrale converge donc et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}$. Par parité, on a aussi $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}$. On conclut grâce à la définition.

2. Propriétés des intégrales généralisées.

On va retrouver la même liste de propriétés que pour les intégrales de fonctions c.p.m. sur un segment. Allons-y, et sans démonstration!

Dans tout ce qui suit, on considère un intervalle I de $\mathbb{R}$, de borne inférieure a, de borne supérieure b. Cet intervalle I peut s'écrire, soit $[a,b[$, soit $]a,b]$, soit $]a,b[$ (voire même $[a,b]$ mais dans ce cas c'est un segment donc cela n'a plus guère d'intérêt!), on peut éventuellement avoir $a=-\infty$ ou $b=+\infty$.

Linéarité. Soient $f,g : I \to \mathbb{K}$ c.p.m., soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si f et g ont toutes deux des intégrales convergentes sur I, alors la fonction $\lambda f + g$ aussi, et on a alors la relation

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) + g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Positivité. Soit $f : I \to \mathbb{R}_+$, c.p.m. et positive sur I. Alors, si l'intégrale de f sur I converge, cette intégrale est positive: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.

Pour démontrer ces deux derniers résultats, si $I=[a,b[$ par exemple, on utilise la linéarité et la positivité connues des intégrales sur les segments $[a,x]$, et on passe à la limite lorsque $x \to b^-$. On adapte pour les autres types d'intervalles.

Croissance. Soient $f,g : I \to \mathbb{R}$ c.p.m., toutes deux d'intégrales convergentes sur I. Si $f \leq g$ sur I, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Cela résulte facilement de la linéarité et de la positivité.

Relation de Chasles. Soit $f : I \to \mathbb{K}$, c.p.m., d'intégrale convergente sur I. Si u, v, w sont trois points de $\overline{\mathbb{R}}$ qui appartiennent à I ou sont des extrémités de I, on a
$$\int_u^w f(x)\,\mathrm{d}x = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x + \int_v^w f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

3. Changement de variable.

Voici le théorème au programme:

Théorème. Si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$, et si $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ est continue, alors l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et, en cas de convergence, elles sont égales.

Commentaire. Ce théorème s'adapte en fait aux intégrales généralisées sur tout type d'intervalle puisque, si par exemple f est une fonction c.p.m. sur $[0,1[$, elle est aussi c.p.m. sur $]0,1[$, et la notation $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ représente aussi bien l'intégrale sur $]0,1[$ que sur $[0,1[$ (si elle converge). Il suffit alors de disposer d'un changement de variable $\varphi :]\alpha,\beta[\to]0,1[$ entre les intervalles ouverts.

Avec les notations du théorème, on a $a = \lim\limits_{x\to\alpha} \varphi(x)$ et $b = \lim\limits_{x\to\beta}\varphi(x)$. De plus, la bijection réciproque $\varphi^{-1} :]a,b[\to]\alpha,\beta[$ est aussi strictement croissante, avec $\lim\limits_{y\to a} \varphi^{-1}(y) = \alpha$ et $\lim\limits_{y\to b}\varphi^{-1}(y) = \beta$.

Preuve. Je me placerai dans le cas plus simple d'un intervalle semi-ouvert $I = [a,b[$, et φ sera une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $J = [\alpha,\beta[$ vers I. Dans ce cas, on a $a = \varphi(\alpha)$. Allons-y!

Pour $y \in I$, posons $F(y) = \displaystyle\int_a^y f(t)\mathrm{d}t$, et pour $x \in J$, posons $H(x) = \displaystyle\int_\alpha^x (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u$. Les fonctions f et $(f\circ\varphi)\varphi'$ étant continues sur I et J respectivement, il résulte du théorème fondamental de l'analyse que F et H sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur ces intervalles, avec $F' = f$ sur I et $H' = (f\circ\varphi)\varphi' = (F'\circ\varphi)\varphi' = (F\circ\varphi)'$ sur J. De plus, $H(\alpha) = 0$ et $(F\circ\varphi)(\alpha) = F(a) = 0$, on a donc $H = F\circ\varphi$ sur J.

- si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors la fonction F admet une limite finie L au point b: $\lim\limits_{y\to b} F(y) = L$ et, comme par ailleurs, $\lim\limits_{x\to\beta}\varphi(x) = b$, par composition de limites, on déduit que $\lim\limits_{x\to\beta}(F\circ\varphi)(x) = L$, soit $\lim\limits_{x\to\beta} H(x) = L$, ce qui traduit la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$, et sa valeur est aussi L.

- si l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge, alors la fonction H admet une limite finie L au point β, i.e. $\lim\limits_{x\to\beta} H(x) = L$ et, comme $\lim\limits_{y\to b}\varphi^{-1}(y) = \beta$, par composition de limites, on a $\lim\limits_{y\to b}(H\circ\varphi^{-1})(y) = L$, i.e. $\lim\limits_{y\to b} F(y) = L$, donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut L.

Adaptation. Si le changement de variable φ est **strictement décroissant** au lieu d'être strictement croissant, le théorème s'applique encore mais en intervertissant les bornes puisque, dans ce cas, on a $a = \lim\limits_{x\to\beta} \varphi(x)$ et $b = \lim\limits_{x\to\alpha} \varphi(x)$. On a donc, en cas de convergence, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\beta^\alpha (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = -\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$

Exemple. Étudions la nature de l'intégrale $J_s = \displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}u}{u\,\big(\ln(u)\big)^s}$ en fonction du réel s. L'intégrande est défini et continu sur $]1,e]$, mais J_s peut aussi être considérée comme une intégrale sur $]1,e[$. Soit donc $\varphi : \begin{cases}]1,e[& \to &]0,1[\\ u & \mapsto & \ln(u) \end{cases}$. L'application φ est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante. Soit $f : \begin{cases}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^{-s} \end{cases}$. Alors f est continue sur $]0,1[$. En appliquant le théorème avec $]\alpha,\beta[=]1,e[$ et $]a,b[=]0,1[$, on peut affirmer que l'intégrale $J_s = \displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u$ converge si et seulement si l'intégrale $I_s = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{-s}\mathrm{d}t$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $s<1$ puisqu'on a reconnu une intégrale de référence.

Exercice II.3.1. Convergence et calcul de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$ $\square$

4. **Intégration par parties.**

On retiendra le théorème suivant:

Théorème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes a et b. Soient f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si le produit fg admet des limites finies en les bornes a et b, alors les intégrales généralisées de fg' et de $f'g$ sont de même nature. En cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

en posant $[fg]_a^b = \lim\limits_{t\to b} f(t)g(t) - \lim\limits_{t\to a} f(t)g(t)$**.**

Exercice II.4.1. Convergence et calcul de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $n\in\mathbb{N}$.

III. Intégrabilité

1. Intégrales absolument convergentes.

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction c.p.m., l'intervalle I de $\mathbb{R}$ ayant pour bornes a et b. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

L'intérêt majeur de cette notion est qu'elle entraîne la convergence.

Théorème. **Toute intégrale absolument convergente est convergente.**

Preuve. Pour les fonctions à valeurs réelles, on va introduire les notations suivantes: si x est un réel, on pose $x^+ = \max\{0, x\}$ et $x^- = \max\{0, -x\}$. On a alors, pour tout x réel, les relations $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$. Le lecteur est invité à représenter graphiquement les fonctions $x \mapsto x^+$ et $x \mapsto x^-$ (on parle de **partie positive** *et* **partie négative** *du réel x). Pour $f : I \to \mathbb{R}$, c.p.m. à valeurs réelles, on considère ainsi sa partie positive f^+ et sa partie négative f^-. Il est clair que $0 \leq f^+ \leq |f|$ et $0 \leq f^- \leq |f|$ sur I. Si on suppose l'intégrale de f absolument convergente, alors l'intégrale de $|f|$ est convergente et, par la règle de comparaison énoncée dans le paragraphe* **I.2.** *(et valable bien sûr sur tout type d'intervalle), on déduit la convergence des intégrales sur I de f^+ et de f^- puis, par linéarité, la convergence de l'intégrale de f puisque $f = f^+ - f^-$.*

Si f est à valeurs complexes, posons $f = g + ih$ avec $g = \mathrm{Re}(f)$ et $h = \mathrm{Im}(f)$ réelles (et c.p.m. sur I). On a alors $0 \leq |g| \leq |f|$ et $0 \leq |h| \leq |f|$ sur I donc, si on suppose l'intégrale de f absolument convergente, par comparaison (toujours proposition énoncée en **I.2.***), les intégrales de g et de h sont absolument convergentes donc convergentes (grâce à l'étude du cas réel que l'on vient de faire), donc par linéarité, on déduit la convergence de l'intégrale de $f = g + ih$.*

La réciproque de ce théorème est fausse: il existe des intégrales **semi-convergentes**, i.e. convergentes, mais non absolument convergentes. Un exemple classique est l'**intégrale de Dirichlet** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, qui sera étudiée en TD.

Proposition. Inégalité triangulaire. **Soit $f : I \to \mathbb{K}$, c.p.m., l'intervalle I de $\mathbb{R}$ ayant pour bornes a et b avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, alors on a**

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t\ .$$

Preuve. Si $I = [a, b[$, l'inégalité $\displaystyle\left| \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^x \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$ est connue pour tout $x \in [a, b[$, il suffit de passer à la limite lorsque $x \to b^-$. On adapte pour les autres types d'intervalles.

2. Vocabulaire des fonctions intégrables.

Pas vraiment de notion nouvelle dans ce paragraphe, juste un changement de vocabulaire:

Définition. Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est dite **intégrable** sur I si elle est continue par morceaux sur I, et si son intégrale sur I est absolument convergente.

Si a et b, avec $a < b$, sont les bornes de l'intervalle I, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pourra aussi être notée $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ ou bien $\displaystyle\int_I f$.

Dans le cas $I = [a, b[$, si f est c.p.m. sur I, on dira parfois que f est **intégrable en b**, et dans le cas $I =]a, b]$ qu'elle est **intégrable en a**.

<u>Exemple.</u> La fonction "sinus cardinal" $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ n'est donc pas intégrable sur $]0,+\infty[$, même si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

<u>Fonctions de référence.</u> Rien de nouveau ici non plus, il s'agit juste de reformuler avec ce nouveau vocabulaire les résultats à connaître et déjà énoncés dans les paragraphes **I.1.** et **II.1.b.**. Les fonctions entrant en jeu étant de signe constant sur l'intervalle d'étude, l'intégrabilité équivaut dans ce cas à la convergence de l'intégrale:

(1): La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$.

(2): La fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

(3): La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$.

(4): La fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

On pourra aussi, s'il n'y a pas d'ambiguïté, énoncer que

(1): La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 0$.

(2): La fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

(3): La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable en 0^+.

(4): La fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ est intégrable en 0^+ si et seulement si $\alpha < 1$.

3. <u>Invariance par translation ou symétrie.</u>

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ c.p.m., soit α un réel, soit $g : [a+\alpha, b+\alpha[\to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall x \in [a+\alpha, b+\alpha[\qquad g(x) = f(x-\alpha)\ .$$

Il est clair que g est intégrable sur $[a+\alpha, b+\alpha[$ *si et seulement si* f est intégrable sur $[a,b[$.
De même, introduisons $h :]\alpha-b, \alpha-a] \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall x \in]\alpha-b, \alpha-a] \qquad h(x) = f(\alpha-x)\ .$$

Alors h est intégrable sur $]\alpha-b, \alpha-a]$ *si et seulement si* f est intégrable sur $[a,b[$.

<u>Commentaire.</u> Graphiquement, la courbe représentative de g se déduit de celle de f par une translation de vecteur $\alpha\overrightarrow{e_1}$, et celle de h se déduit de celle de f par une symétrie par rapport à la droite "verticale" d'équation $x = \dfrac{\alpha}{2}$.

<u>Commentaire.</u> On peut généraliser, bien sûr, à des intervalles de la forme $]a,b]$ ou $]a,b[$.
On peut aussi dire, de façon un peu plus floue, qu'une fonction f est intégrable en a^+ *si et seulement si* $t \mapsto f(a+t)$ est intégrable en 0^+, et que f est intégrable en b^- *si et seulement si* $t \mapsto f(b-t)$ est intégrable en 0^+, si a et b sont des réels. Il est en effet agréable de se ramener à des études d'intégrabilité en 0^+ puisque c'est en ce point que l'on dispose de résultats de référence, concernant notamment les fonctions de type Riemann $t \mapsto t^{-\alpha}$.

On pourra, par exemple, énoncer sans plus de justification, le fait que, si a et α sont des réels, **la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{|x-a|^\alpha}$ est intégrable en a si et seulement si $\alpha < 1$.**

4. <u>Théorèmes de comparaison.</u>

Ces règles seront écrites dans un premier temps dans le cas d'intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec a réel, elles seront ensuite adaptées à tout type d'intervalle.

<u>Règle 1.</u> Soient f et g continues par morceaux sur $[a, +\infty[$. Si $|f| \leq |g|$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f.

<u>Preuve.</u> Vu la définition de l'intégrabilité, cette règle n'est rien d'autre que la proposition énoncée dans le paragraphe **I.2.** *appliquée aux fonctions positives $|f|$ et $|g|$.*

<u>Règle 2.</u> Soient f et g continues par morceaux sur $[a, +\infty[$. Si $f(x) = O\big(g(x)\big)$ lorsque x tend vers $+\infty$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f.

<u>Preuve.</u> On se ramène facilement à la règle précédente puisque, si $f = O(g)$ au voisinage de $+\infty$, il existe $c \in [a, +\infty[$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que $\big|f(x)\big| \leq M \big|g(x)\big|$ pour $x \geq c$. Or, l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ entraîne son intégrabilité sur $[c, +\infty[$ qui est inclus dans $[a, +\infty[$, puis la règle 1 permet de conclure que f aussi est intégrable sur $[c, +\infty[$. Enfin, f est évidemment intégrable sur $[a, c]$ car cet intervalle est un segment, donc f est bien intégrable sur $[a, +\infty[$.

<u>Remarque.</u> Dans cette règle 2, on peut bien sûr remplacer le grand O par un petit o, puisque l'hypothèse $f(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\big(g(t)\big)$ est plus forte (i.e. entraîne) que $f(t) \underset{t \to +\infty}{=} O\big(g(t)\big)$.

<u>Règle 3.</u> Soient f et g continues par morceaux sur $[a, +\infty[$. Si $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g.

<u>Preuve.</u> En effet, si $f \sim g$, on a à la fois $f = O(g)$ et $g = O(f)$, on applique donc la règle 2 "dans les deux sens".

Ces règles sont très semblables à celles énoncées pour les séries, même si le programme fait le choix d'utiliser des vocabulaires différents: les énoncés sur les séries portent essentiellement sur les séries à termes positifs (on peut alors les utiliser pour montrer la convergence absolue d'une série à termes quelconques), tandis que ceux sur les intégrales sont énoncés en termes d'intégrabilité (ce qui revient aussi, en fin de compte, à se ramener à des fonctions positives et à étudier des convergences absolues d'intégrales). À titre d'exemple, on peut énoncer une

<u>Règle de Riemann.</u> Si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ est c.p.m. et s'il existe un réel α, avec $\alpha > 1$, tel que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

En effet, on a dans ce cas $f(t) = o(t^{-\alpha})$ au voisinage de $+\infty$ et $t \mapsto t^{-\alpha}$ est intégrable en $+\infty$, donc f est aussi intégrable en $+\infty$ d'après la remarque énoncée après la règle 2 ci-dessus.

<u>Exercice III.4.1.</u> Montrer l'intégrabilité de $f : x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$ sur $[0, +\infty[$. $\square$

<u>Exercice III.4.2.</u> Montrer l'intégrabilité de $g : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2}$ sur $[1, +\infty[$. $\square$

La règle 1 ci-dessus est "globale" (inégalité sur tout l'intervalle d'étude), les règles 2 et 3 sont "locales" (comparaison asymptotique au voisinage de $+\infty$). Pour adapter au cas d'un intervalle quelconque, on distinguera aussi des comparaisons globales et des comparaisons locales.

__Règle 1 bis (globale).__ **Soient f et g deux fonctions c.p.m. sur un intervalle I. Si $|f| \leq |g|$ sur I et si g est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.**

On pourra retenir la phrase suivante:

Toute fonction majorée en module par une fonction intégrable est intégrable.

Si l'on préfère procéder par une (ou des) comparaison(s) locale(s), il faut comprendre qu'il est nécessaire de faire une étude locale (rechercher un équivalent, utiliser un o ou un O) au voisinage de chaque borne exclue de I (en clair, là où il y a un crochet ouvert dans l'écriture de l'intervalle I). Si I est un intervalle semi-ouvert, il y a donc une seule étude locale à faire. Si $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert, on étudie successivement l'intégrabilité en a^+ et l'intégrabilité en b^-. Le lecteur adaptera donc de lui-même les règles 2 et 3 ci-dessus au cas d'un intervalle semi-ouvert de la forme $[a, b[$, où b ne vaut pas nécessairement $+\infty$, ou de la forme $]a, b]$ ou $]a, b[$. **Il est nécessaire de pratiquer beaucoup pour assimiler le fonctionnement de ces comparaisons globales ou locales.**

__Exercice III.4.3.__ Montrer l'intégrabilité de $f : t \mapsto \big(\ln(t)\big)^2$ sur $]0, 1]$. $\square$

__Exercice III.4.4.__ Montrer l'intégrabilité de $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2 + 1}$ sur $]0, +\infty[$. $\square$

__Exercice III.4.5.__ Soient deux paramètres réels a et b avec $b > 0$, discuter de l'intégrabilité de $f : t \mapsto \dfrac{t^a}{1 + t^b}$ sur $]0, +\infty[$. $\square$

5. __Théorème de stricte positivité.__

Il s'agit juste d'une adaptation (*preuve sans difficulté*) du théorème du même nom, déjà vu pour les intégrales sur un segment.

__Théorème.__ **Si f est __continue__, intégrable et positive sur I, et si $\displaystyle\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle sur I.**

6. __L'espace vectoriel des fonctions intégrables.__

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on notera $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux et intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On notera $L^1_c(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions __continues__ et intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Bien sûr, $L^1_c(I, \mathbb{K}) \subset L^1(I, \mathbb{K})$.

__Proposition.__ **Les ensembles $L^1(I, \mathbb{K})$ et $L^1_c(I, \mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.**

__Preuve.__ Il suffit de montrer que ce sont des s.e.v. des espaces vectoriels déjà connus $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ respectivement. Or, la fonction nulle sur I appartient à chacun des deux et, si f et g appartiennent par exemple à $L^1(I, \mathbb{K})$ et si α est un scalaire, alors la majoration du module

$$|\alpha f + g| \leq |\alpha|\,|f| + |g|$$

montre que $\alpha f + g \in L^1(I, \mathbb{K})$: en effet, la propriété de linéarité énoncée dans le paragraphe **II.2.** *montre que l'intégrale de $|\alpha|\,|f| + |g|$ sur I est convergente, et on applique la règle 1bis du paragraphe* **III.4.** *ci-dessus.*

Proposition. **Si, pour $f \in L_c^1(I, \mathbb{K})$, on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_I |f|$, alors on définit ainsi une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $L_c^1(I, \mathbb{K})$.**

Cette norme $\|\cdot\|_1$ est appelée **norme de la convergence en moyenne**.

Preuve. *On a bien $\|f\|_1 \in \mathbb{R}_+$, et $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $f = 0$ (axiome de séparation), c'est le théorème de stricte positivité. L'homogénéité $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$ résulte de la propriété de linéarité énoncé en* **II.2.** *Enfin, si f et g sont dans $L_c^1(I, \mathbb{K})$, on a $|f + g| \leq |f| + |g|$ donc, par croissance de l'intégrale, puis linéarité,*

$$\|f + g\|_1 = \int_I |f + g| \leq \int_I \big(|f| + |g|\big) = \int_I |f| + \int_I |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1 \ ,$$

c'est l'inégalité triangulaire.

Remarque. En définissant $\|\cdot\|_1$ de la même façon sur $L^1(I, \mathbb{K})$, on n'a plus tout à fait une norme (l'axiome de séparation n'est pas satisfait) puisque le théorème de stricte positivité ne s'applique qu'aux fonctions continues.

7. L'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable (HP).

D'abord une petite inégalité toute simple:

Lemme. **Si a et b sont deux nombres complexes, on a**

$$\boxed{|ab| \leq \frac{1}{2}\big(|a|^2 + |b|^2\big)} \ .$$

Preuve. *En effet, $|a|^2 + |b|^2 - 2|ab| = \big(|a| - |b|\big)^2 \geq 0$ puisque c'est le carré d'un réel.*

Remarque. Si a et b sont réels, les barres de modules (ou valeurs absolues) sont inutiles dans le second membre car alors $a^2 \in \mathbb{R}_+$ donc $|a|^2 = \big|a^2\big| = a^2$. Elles sont toutefois indispensables si a et b sont complexes car dans ce cas a^2 et b^2 sont aussi des nombres complexes.

Définition. Une fonction c.p.m. de I vers $\mathbb{K}$ est dite **de carré intégrable** sur I lorsque la fonction f^2 est intégrable sur I.

Du lemme ci-dessus résulte la proposition suivante:

Proposition. **Le produit de deux fonctions de carré intégrable est intégrable.**

Preuve. *Soient f et g deux fonctions c.p.m. et de carré intégrable sur I. Alors fg est c.p.m. et $|fg| \leq \dfrac{1}{2}\big(|f|^2 + |g|^2\big)$. Or, les fonctions $|f|^2$ et $|g|^2$ appartiennent à l'espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$, donc la combinaison linéaire $\dfrac{1}{2}\big(|f|^2 + |g|^2\big)$ appartient aussi à cet espace vectoriel, donc est intégrable sur I. Par majoration du module par une fonction intégrable, on conclut que fg est intégrable sur I.*

Notons maintenant $L^2(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux et de carré intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. De même, on notera $L_c^2(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues et de carré intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition. **Les ensembles $L^2(I,\mathbb{K})$ et $L^2_c(I,\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.**

Preuve. Il suffit de montrer que ce sont des s.e.v. des espaces vectoriels déjà connus $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$ et $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ respectivement. Or, la fonction nulle sur I appartient à chacun des deux donc ces ensembles sont non vides. Si $f \in L^2(I,\mathbb{K})$ par exemple et si $\alpha \in \mathbb{K}$, il est clair que $\alpha f \in L^2(I,\mathbb{K})$ (toujours la propriété de linéarité énoncée en **II.2.***). Enfin, si f et g appartiennent à $L^2(I,\mathbb{K})$, alors $(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$, donc $(f+g)^2$ est une somme de trois fonctions intégrables (f^2 et g^2 par définition, et fg grâce à la proposition ci-dessus), donc $(f+g)^2 \in L^1(I,\mathbb{K})$, donc $f+g \in L^2(I,\mathbb{K})$.*

De plus, si l'on se restreint aux fonctions continues à valeurs réelles, on a:

Proposition. **On définit un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $L^2_c(I,\mathbb{R})$, en posant pour toutes fonctions f et g de cet espace, $(f|g) = \int_I fg$.**

Preuve. D'abord, on sait que fg est intégrable si f et g sont toutes deux de carré intégrable, d'où l'existence de $(f|g)$. Il s'agit bien d'une forme bilinéaire (par linéarité de l'intégrale notamment), symétrique (évident), positive car $(f|f) = \int_I f^2 \geq 0$, définie car, f^2 étant continue et positive, son intégrale est nulle si et seulement si f est nulle sur I.

On munit ainsi l'espace $L^2_c(I,\mathbb{R})$ d'une structure préhilbertienne. La norme associée à ce produit scalaire, notée $\|\cdot\|_2$, est définie par

$$\forall f \in L^2_c(I,\mathbb{R}) \qquad \|f\|_2 = \sqrt{(f|f)} = \left(\int_I f^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

on l'appelle **norme de la convergence en moyenne quadratique**.

Mentionnons enfin l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**:

$$\forall (f,g) \in \left(L^2_c(I,\mathbb{R})\right)^2 \qquad \left|(f|g)\right| \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2 ,$$

soit

$$\left|\int_I fg\right| \leq \left(\int_I f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I g^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

que l'on peut écrire aussi

$$\left(\int_I fg\right)^2 \leq \left(\int_I f^2\right)\left(\int_I g^2\right),$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si les fonctions f et g sont colinéaires.