DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 2

PSI2 2024-2025 **pour le 17/10/2024**

Pour tout réel t, on pose

$$x(t)=\cos(t^2)\quad,\quad y(t)=\sin(t^2)\quad,\quad X(t)=\int_0^t\cos(u^2)\,\mathrm{d}u\quad\text{et}\quad Y(t)=\int_0^t\sin(u^2)\,\mathrm{d}u\ .$$

1. Montrer que les fonctions X et Y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier les variations de la fonction Y sur $\mathbb{R}_+$.

3. Pour k entier naturel, on pose $m_k=Y(\sqrt{2k\pi}\,)$. Montrer que $m_{k+1}-m_k=\displaystyle\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v$.
En déduire que la suite (m_k) est croissante.

4. Pour k entier naturel, on pose $M_k=Y\left(\sqrt{(2k+1)\pi}\,\right)$. Montrer que les suites (m_k) et (M_k) sont adjacentes.

5. En déduire que l'intégrale généralisée $J=\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(u^2)\,\mathrm{d}u$ converge, et montrer que $J>0$.

6. Pour k entier naturel, minorer l'intégrale $\displaystyle\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}}|\sin(t^2)|\,\mathrm{d}t$. En déduire que la fonction y n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

7. À l'aide d'une intégration par parties, montrer la convergence de l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(u^2)\mathrm{d}u$.

Dans la suite, on pose $K=I+iJ$. Ainsi, $K=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{iu^2}\,\mathrm{d}u$.

Pour $t\in\mathbb{R}_+$, on pose $Z(t)=X(t)+iY(t)=\displaystyle\int_0^t e^{iu^2}\,\mathrm{d}u$ et $f(t)=\displaystyle\int_0^1\frac{e^{it^2(1+u^2)}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.

On admettra que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $f'(t)=\displaystyle\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{it^2(1+u^2)}}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u$.

8. Question réservée aux 5/2: Prouver le résultat admis ci-dessus.

9. En déduire la relation

$$\forall t\in\mathbb{R}_+\qquad f(t)=\frac{\pi}{4}+i\,Z(t)^2\ .$$

10. Soit ε un réel tel que $0<\varepsilon<1$. Prouver la relation

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*\qquad\int_\varepsilon^1\frac{e^{it^2u^2}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2it^2}\left(\left[\frac{e^{it^2u^2}}{u(1+u^2)}\right]_{u=\varepsilon}^{u=1}+\int_\varepsilon^1\frac{(1+3u^2)\,e^{it^2u^2}}{u^2(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u\right)\ .$$

11. Soit $\varepsilon\in\,]0,1[$. Prouver l'existence d'un réel $K_\varepsilon>0$ tel que

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*\qquad\left|\int_\varepsilon^1\frac{e^{it^2u^2}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\right|\leq\frac{K_\varepsilon}{t^2}\ .$$

12. En déduire que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$.

13. En déduire la valeur des intégrales généralisées I et J.

PROBLÈME 2

Dans tout ce problème, on notera E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Si u est un endomorphisme de E, on note $\mathcal{C}(u)$ le **commutant** de u, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u, soit $\mathcal{C}(u) = \big\{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\big\}$.

PARTIE A. Généralités.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, stable par la loi $\circ$ de composition des endomorphismes.

PARTIE B. Cas d'un endomorphisme nilpotent d'indice 2.

Dans cette partie, on se donne $u \in \mathcal{L}(E)$, on suppose que $u \neq 0$ et $u^2 = 0$.

On note r le rang de u, et on pose $s = n - 2r$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$, en déduire que s est un entier naturel.

3. Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E, soit $(e_1, \cdots, e_r)$ une base de G. Montrer que la famille $\big(u(e_1), \cdots, u(e_r)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

4. En introduisant un sous-espace vectoriel H de E tel que $\mathrm{Ker}(u) = H \oplus \mathrm{Im}(u)$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_r & 0_{r,s} & I_r \\ 0_{s,r} & 0_s & 0_{s,r} \\ 0_r & 0_{r,s} & 0_r \end{pmatrix}$.

5. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix}$, les formats des blocs étant identiques à ceux de la matrice de u. À quelles conditions sur les blocs A_1, $\cdots$, A_9 l'endomorphisme v commute-t-il avec u ?

6. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(u)$ en fonction de n et de r. Montrer que $\dim\big(\mathcal{C}(u)\big) \geq \dfrac{n^2}{2}$.

PARTIE C. Une autre étude d'exemple.

Dans toute cette partie, on suppose que u est un endomorphisme de E satisfaisant la relation

$$u \circ (u - \mathrm{id}_E)^2 = 0\ .$$

On pose par ailleurs $E_1 = \mathrm{Ker}(u)$, $\quad E_2 = \mathrm{Ker}\,\big((u - \mathrm{id}_E)^2\big)$, $\quad p = \dim(E_1)$, $\quad q = \dim(E_2)$.

7. Montrer que $E_2 = \mathrm{Im}(u)$, puis que $E = E_1 \oplus E_2$.

Dans la suite de cette partie, on notera $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$.

8. Soit $v \in \mathcal{C}(u)$. Montrer que les sous-espaces E_1 et E_2 sont stables par v.

9. Montrer que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & I_q + N \end{pmatrix}$, où $N \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ vérifie $N^2 = 0_q$.

10. En déduire qu'un endomorphisme v de E commute avec u si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $V = \begin{pmatrix} A & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ quelconque, et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ vérifiant $DN = ND$.

11. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(u)$. *On l'exprimera en fonction de p, q et $r = \mathrm{rg}(N)$.*

12. Montrer que $\dim\big(\mathcal{C}(u)\big) \geq n$.