DS de MATHÉMATIQUES numéro 2 COMMENTAIRES
PSI2 2024-2025

PROBLÈME 1

C'est un problème d'algèbre linéaire construit avec un bout de sujet e3a (la partie II), un bout de sujet de Centrale (la partie III), des ajouts personnels (le reste) et quelques bouts de ficelle pour tenir le tout!

2.a. Je n'ai pas trop sanctionné, mais le passage de $A^{p-1} \neq 0_n$ à "il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $A^{p-1}X \neq 0$" est parfois problématique: certains voudraient par exemple que le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ convienne, il n'y aucune raison pour cela! Il suffit en fait de dire que, la matrice A^{p-1} étant non nulle, son rang est non nul, donc son image n'est pas réduite à $\{0\}$. Le reste de la question est une démonstration classique.

3.a. L'inclusion $N_{k-1} \subset N_k$ est triviale, la vraie question est de démontrer que cette inclusion est stricte. Quelques rares bonnes réponses.

3.b. Un certain nombre de bonnes réponses, utilisant l'associativité de la somme directe, ou en développant un peu plus.

3.c. J'ai lu beaucoup de complications inutiles pour cette question: il suffit en effet de remarquer que S_k est inclus dans N_k.

3.d. Quelques bonnes réponses, beaucoup de fausses ou insuffisamment développées. Cette question demande une bonne compréhension de la représentation matricielle des applications linéaires... et un peu de rédaction.

5. J'apprécie de lire "noyau d'une forme linéaire non nulle", cela montre que vous apprenez le cours.

7. Des discours pas toujours très convaincants proposant des conditions pour que la "réunion" de deux familles libres soit encore libre, il me semble préférable de revenir à la démonstration classique où l'introduit une famille de scalaires et on montre qu'ils sont tous nuls, ce n'est pas bien long à écrire.

8. Des raisonnements sur les dimensions où certains s'emmêlent un peu les pinceaux. Entraînez-vous à rédiger avec précision!

9.b. ATTENTION! La trace est un "invariant de similitude", cela signifie que, **si** deux matrices sont semblables, **alors** elles ont la même trace. La réciproque est évidemment fausse: les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables!

Il ne fallait pas non plus utiliser les opérations élémentaires sur les lignes et colonnes, qui transforment une matrice en une matrice **équivalente** (*notion hors programme PSI*), mais **pas en général en une matrice semblable!**

Comment faire alors pour montrer que deux matrices sont semblables ? On en parlera en TD.

9.c. Des développements souvent longs et maladroits. Il suffit de dire que, comme $\rho^2 = f$, les endomorphismes f et ρ commutent, donc le noyau et l'image de f sont stables par ρ, c'est un théorème du cours.

9.d. Quasiment aucune bonne réponse: la vision matricielle des sous-espaces stables est très peu acquise.

PROBLÈME 2

Ce problème est le début, à peine remanié, d'un sujet CCP datant de 2006 (*oui, c'est un peu vieux, mais les programmes n'ont pratiquement pas bougé depuis*) dans la filière PSI.

2.b. Mentionner l'inégalité triangulaire pour dire que $|z+1| \leq |z|+1$.

2.c. Je crois que je n'ai vu que deux bonnes réponses à cette question pourtant très élémentaire! La série $\sum a_n^*$ ne converge pas **si et seulement si** $|z| < 1$. La condition $|z| < 1$ est **suffisante** pour que la série converge, mais pas **nécessaire**, il y a en effet convergence **si et seulement si** $|z+1| < 2$, ce qui correspond graphiquement à un disque ouvert de centre $(-1, 0)$, et de rayon 2, dans le plan.

2.d. Un nombre assez satisfaisant de bonnes réponses, là j'avoue je m'attendais à pire sur les calculs avec des nombres complexes et de la trigonométrie!

3.a. Aïe, aïe, aïe, dès qu'on voit une factorielle, on se jette sur la formule de Stirling... Eh bien non, il y avait bien mieux à faire! On peut y arriver bien sûr avec Stirling, mais ce n'est pas si simple et, au final, j'ai vu très très peu de réponses exactes.

5. Une démonstration "à la Cesaro", que certains semblent maîtriser assez bien.

6. On pouvait simplement, "par une translation", se ramener au cas d'une limite nulle traité dans la question **5.**, mais beaucoup préfèrent tout réécrire, bon pourquoi pas ?

8. Nombre d'entre vous abordent cette question... sans doute sans avoir trop lu l'énoncé, qui ne demandait que des "petits" calculs pour les petites valeurs de n allant de 0 à 3, cela n'aboutit pas bien sûr puisque vous ne semblez pas trop savoir ce que vous cherchez.

9. à 12. Questions très peu abordées.