Suites de fonctions. Études d'exemples.

1. a. Étudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions (f_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad f_n(x) = (n+1)\ \cos^n x\ \sin x\ .$$

b. Comparer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{n\,(1+x^n)}\ .$$

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $I =]-\pi, \pi[$ par

$$f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n\ \sin(x)} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad ; \quad f_n(0) = 0\ .$$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de la forme $J = [\ a\ ,\ \pi - a\ ]$, avec $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. La convergence est-elle uniforme sur I ? *On calculera* $f_n\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

4*. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction P_n sur $\mathbb{R}$ par $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

a. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ fixé. Montrer que, pour n assez grand, on a $P_n(x) = \dfrac{\sin x}{2^n\ \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$.

b. Démontrer la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (P_n). On notera P la fonction limite simple.

c. Calculer $P_n(2^n\pi)$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

5. Pour tout $t \in [-1,1]$, on pose $f_0(t) = 2t$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(t) = \sqrt{2 + f_n(t)}$. Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) sur $[-1,1]$. Déterminer les limites des suites (I_n), (J_n) et (K_n), avec

$$I_n = \int_{[-1,1]} f_n \quad ; \qquad J_n = \int_{[-1,1]} \frac{1}{f_n} \quad ; \qquad K_n = \int_{[-1,1]} \frac{f_n}{f_{n+1}}\ .$$

Suites de fonctions. Exercices théoriques.

6. Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément vers des fonctions f et g supposées bornées. Montrer que la suite de fonctions $(f_n g_n)$ converge uniformément vers la fonction fg.

7. On suppose qu'une suite de fonctions (f_n) de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ converge uniformément vers $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, et on considère une suite (x_n) d'éléments de $[a,b]$ convergeant vers x. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, de dérivée seconde bornée. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$g_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right]\ .$$

Étudier la convergence simple, puis uniforme, de la suite de fonctions (g_n).

9. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et non identiquement nulle, telle que $f(0) = f(1) = 0$. Pour tout n entier naturel non nul, on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par
$$f_n(x) = \begin{cases} n\, f(nx) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

a. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0,1]$. Cette convergence est-elle uniforme ?

b. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,1]$ pour tout a tel que $0 < a < 1$.

c. Comparer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x$.

Séries de fonctions.

10. Soit $\alpha > 0$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $u_n(x) = x^\alpha\, e^{-n^2 x}$. On posera $u_n(0) = 0$.

a. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

b. Étudier les variations de la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que la convergence de la série est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

c. Pour quelles valeurs de α la convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

11. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n + n^2\, x^2}$.

a. Ensemble de définition de $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$? Étudier le mode de convergence de la série.

b. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

12. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}$ lorsque la série est convergente. On notera $u_n(x) = e^{-n^2 x}$.

a. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout entier naturel k, exprimer $f^{(k)}(x)$ comme somme d'une série.

c. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

e. Posons $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} s_n(x)$, en déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

13. On pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ (**fonction zéta de Riemann**). Quel est l'ensemble de définition de ζ ? Variations de la fonction ζ. Limite en $+\infty$. Équivalent en 1^+.

14*. Pour $x > 0$, on pose $\xi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

a. Montrer que la fonction ξ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. En considérant, pour $x \in]0,1[$ fixé, la fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{1}{(2t-1)^x} - \dfrac{1}{(2t)^x}$ pour $t \in [1,+\infty[$, donner un encadrement de $\xi(x)$, et déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \xi(x)$.

15. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

a. Ensemble de définition de $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$? Étudier le mode de convergence de la série.

b. Étudier les variations de f sur son ensemble de définition. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+ (*on pourra encadrer $f(x)$ par des intégrales*).

16*. Soit $a \in]-1,1[$. Montrer que l'on définit une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en posant

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n\, x)\ .$$

Démontrer la majoration $\quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|f^{(p)}(x)\right| \leq \dfrac{1}{1-|a|}$.

En déduire que f est somme, sur $\mathbb{R}$, de sa **série de Taylor en zéro** : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

17. Pour $x > 0$, on pose $s(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

a. Montrer que s est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Préciser le sens de variation et la convexité de la fonction s.

c. Montrer que $s(x+1) + s(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

d. Donner un équivalent de s en 0.

e. Donner un équivalent de s en $+\infty$.

18. On étudie $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$.

a. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

c. On donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Donner le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0.

19*. Soit $z \in \mathbb{C}$. Par une interversion somme-limite, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z \ .$$

Retrouver le résultat en considérant module et argument de $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$.

Exercices avec Python.

20. Soit (P_n) la suite de fonctions polynomiales définies sur $[0,1]$ par

$$P_0(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1] \quad P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - P_n(t)^2\right) .$$

a. On suppose que la suite de fonctions (P_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f. Déterminer la fonction f.

b. Sur le même schéma, représenter sur $[0,1]$ les fonctions P_n, pour n de 0 à 10, ainsi que la fonction f.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1] \quad 0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1] \quad 0 \leq \sqrt{t} - P_n(t) \leq \sqrt{t}\left(1 - \dfrac{\sqrt{t}}{2}\right)^n$.

e. En déduire que la suite de fonctions (P_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

f. En déduire que la fonction $x \mapsto |x|$ est limite uniforme sur $[-1,1]$ d'une suite de fonctions polynomiales. Illustrer avec Python.

21*. Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on définit une suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_0 = f$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \qquad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, \mathrm{d}t \ .$$

a. On supposera dans cette question que la variable `lv` contient les valeurs d'une fonction continue f en des points régulièrement espacés de l'intervalle $[0,1]$. Si la liste `lv` est de longueur p, alors pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, l'élément `lv[k]` contient donc la valeur $f\left(\dfrac{k}{p-1}\right)$.

Écrire une fonction `trapezes(lv)`, qui prend comme argument une liste de valeurs `lv`, et qui retourne la liste des valeurs en les mêmes points de la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$, primitive de f s'annulant en 0. Comme son nom l'indique, le calcul des valeurs de F sera fait par la méthode des trapèzes.

b. En prenant $f(t) = t$, utiliser Python pour représenter sur $[0,1]$ la fonction $g_{10} = \displaystyle\sum_{k=1}^{10} f_k$, où les f_k ont été définis en préambule. *On pourra choisir un pas de calcul de* $0,01$.

c. Représenter, sur $[0,1]$, la fonction $g'_{10} - g_{10}$. Que peut-on conjecturer ?

d. Dans le cas général ($f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue), montrer l'existence de $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et chercher une équation différentielle vérifiée par g.