COLLES de MATHÉMATIQUES **PSI2 2024-2025**

Semaine 5 : du 14/10 au 18/10

Fonctions intégrables

Révisions: intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Théorème fondamental de l'analyse.

Intégrales généralisées, *cf.* programme précédent.

Intégrales absolument convergentes. La convergence absolue entraîne la convergence. Existence d'intégrales semi-convergentes. Notion de fonction intégrable sur un intervalle I. Fonction intégrable en une borne.

Règles de comparaison: toute fonction (c.p.m.) majorée en module par une fonction intégrable sur I est elle-même intégrable sur I. Utilisation de relations de comparaison asymptotique pour montrer l'intégrabilité en une borne de I. Intégrales "faussement généralisées", i.e. cas des fonctions prolongeables par continuité en une borne a avec $a \in \mathbb{R}$.

Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions (c.p.m.) intégrables sur I. Espace préhilbertien $L^2_c(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues et de carré intégrable sur I, à valeurs réelles.

Fonctions convexes (révisions)

Fonctions convexes: définition et interprétation géométrique (tout arc est en-dessous de sa sécante), caractérisation par $f'' \geq 0$ pour les fonctions deux fois dérivables. Position par rapport à une tangente si f est dérivable. Fonctions concaves. Inégalités de convexité: $e^x \geq 1 + x$, $\ln(1 + x) \leq x$. Inégalité $\big|\sin(x)\big| \leq |x|$.

Suites de fonctions (début)

Définition de la convergence simple, de la convergence uniforme d'une suite de fonctions sur un intervalle. Introduction de la notation $\|f\|_\infty$. *La convergence uniforme est définie par* $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Idée de "majoration uniforme". Cas de la convergence uniforme sur tout segment.

Convergence uniforme et continuité. Interversion limite-intégrale dans le cas d'une suite de fonctions continues convergeant uniformément **sur un segment**.

Pas de dérivabilité pour le moment. Pas de séries de fonctions.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ ou de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
- L'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente.
- L'ensemble $L^2_c(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, produit scalaire.
- Fonctions convexes: montrer la croissance de $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, interprétation graphique.
- Fonctions convexes dérivables: sachant f' croissante, étudier la position de l'arc par rapport à une tangente.
- Montrer que, si une suite (f_n) de fonctions continues sur un segment $S = [a, b]$ converge uniformément vers f sur S, alors $\displaystyle\int_S f = \lim_{n\to+\infty} \int_S f_n$.