Rolle, accroissements finis

1. Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$, de degrés p et q respectivement. Soient a et b deux réels distincts. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = P(x)\, e^{ax} + Q(x)\, e^{bx} .$$

Montrer que l'ensemble $Z(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ est de cardinal fini, au plus égal à $p + q + 1$. *Considérer $g(x) = f(x)\, e^{-bx}$ et utiliser le théorème de Rolle.*

- -

Posons $g(x) = f(x)\, e^{-bx} = P(x)\, e^{(a-b)x} + Q(x)$. Alors g est dérivable et

$$g'(x) = \Big[P'(x) + (a-b)\, P(x)\Big]\, e^{(a-b)x} + Q'(x) \ ;$$

$$g''(x) = \Big[P''(x) + 2(a-b)\, P'(x) + (a-b)^2\, P(x)\Big]\, e^{(a-b)x} + Q''(x) \ ;$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$g^{(q+1)}(x) = R(x)\, e^{(a-b)x}$$

où R est un polynôme de degré p exactement.

Donc $g^{(q+1)}$s'annule au plus p fois puis, par applications répétées du théorème de Rolle, g s'annule au plus $p + q + 1$ fois sur $\mathbb{R}$, et il en est de même pour f. *Par exemple, si $g^{(q)}$ s'annulait $p + 2$ fois, alors entre deux zéros consécutifs de $g^{(q)}$, il y aurait au moins un zéro de $g^{(q+1)}$, donc $g^{(q+1)}$ aurait au moins $p + 1$ zéros ce qui est contradictoire. Donc $g^{(q)}$ s'annule au plus $p + 1$ fois. Et on réitère le raisonnement.*

---

2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable (I intervalle de $\mathbb{R}$). Soient A et B deux points de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f, tels que B soit sur la tangente à $\mathcal{C}$ au point A. Montrer qu'il existe un point M de $\mathcal{C}$, distinct de A, tel que la tangente à $\mathcal{C}$ au point M passe par A.

- -

Faire un dessin!

Supposons $A = \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}$, avec $(a, b) \in I^2$, $a < b$. L'hypothèse d'appartenance de B à la tangente $\mathcal{T}_A$ au point A de $\mathcal{C}$ se traduit par la relation $f(b) = f(a) + (b-a)\, f'(a)$. Il s'agit de montrer l'existence d'un x ($a < x < b$ même si l'énoncé ne le précise pas) tel que

$$f(a) = f(x) + (a - x)\, f'(x) .$$

Cette dernière relation traduit effectivement l'appartenance du point A à la tangente $\mathcal{T}_M$, avec $M = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$. Pour cela, considérons la fonction g définie sur $[a, b]$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si} \quad a < x \le b \\ f'(a) & \text{si} \quad x = a \end{cases} .$$

Cette fonction g est continue sur $[a, b]$ (notamment par dérivabilité de f au point a), dérivable sur $]a, b[$, et on a $g(b) = g(a) = f'(a)$ d'après l'hypothèse. On applique alors le théorème de Rolle: il existe $x \in]a, b[$ tel que $g'(x) = 0$, i.e. $f'(x)\,(x-a) - \big(f(x) - f(a)\big) = 0$, ce que l'on voulait prouver.

Fonctions convexes

3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient x, y, z dans I, avec $x < y < z$.

a. Comparer les taux d'accroissement $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ et $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$.

b. Quel est le signe du déterminant
$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} \ ?$$

- -

a. Comme $y \in \,]x,z[$, on peut écrire $y = (1-\lambda)x + \lambda z$ avec $\lambda = \dfrac{y-x}{z-x} \in \,]0,1[$. Par convexité de f, on a $f(y) = f\big((1-\lambda)x+\lambda z\big) \le (1-\lambda)\,f(x) + \lambda\,f(z)$, ce qui s'arrange en
$$f(y)-f(x) \le \lambda\,\big(f(z)-f(x)\big) = \frac{y-x}{z-x}\,\big(f(z)-f(x)\big)\ ,$$
ou encore
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\ .$$

b. On a $D = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & y-x & f(y)-f(x) \\ 0 & z-x & f(z)-f(x) \end{vmatrix}$ en effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. Donc, par développement par rapport à la première colonne,
$$D = (y-x)\,\big(f(z)-f(x)\big) - (z-x)\,\big(f(y)-f(x)\big)\ .$$
De la question **a.**, on déduit immédiatement que $D \ge 0$.

---

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, croissante. Montrer que
- soit f est constante sur $\mathbb{R}$,
- soit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- -

Supposons f non constante, alors il existe x et y réels tels que $x < y$ (pour fixer les idées) et $f(x) \ne f(y)$. Comme f est croissante, on a donc $f(y) > f(x)$. Pour $t \ge y$, on a alors $\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} \ge \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ (*cf.* question **b.** de l'exercice précédent), soit encore $f(t) \ge f(x) + \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\,(t-x)$. On a donc minoré, sur $[y,+\infty[$, la fonction f par une fonction affine qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ puisqu'elle a un coefficient directeur strictement positif. Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.

---

5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable.

a. Montrer que $\forall m \in I\ \ \forall x \in I \quad f(m) \le f(x) + (m-x)\,f'(m)$.

b. En déduire que, si $x_1, \cdots, x_n$ sont des éléments de I, alors
$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \le \frac{1}{n}\,\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ .$$

c. En utilisant le **b.**, montrer que, si $x_1, \cdots, x_n$ sont des réels strictement positifs, alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2 .$$

d. Toujours avec $x_1, \cdots, x_n$ réels strictement positifs, montrer que

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} .$$

- -

a. Écrit sous la forme équivalente $f(x) \geq f(m) + (x - m)\, f'(m)$, cela exprime simplement le fait que le graphe de f est situé au-dessus de sa tangente au point d'abscisse m, ce qui est une propriété de cours.

b. Posons $m = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$. D'abord, on a bien $m \in I$: c'est évident si l'on comprend que m est la **moyenne arithmétique** des x_i, ou alors des manipulations simples d'inégalités montrent que $\alpha \leq m \leq \beta$ si l'on pose $\alpha = \min\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$ et $\beta = \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$.

De la question **a.**, on déduit que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $f(m) \leq f(x_i) + (m - x_i)\, f'(m)$. En faisant la moyenne de ces n inégalités, c'est-à-dire en les ajoutant et en divisant par n, et en tenant compte du fait que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (m - x_i) = n\, m - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, on obtient l'inégalité

$$f(m) = f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) .$$

c. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} \geq 0$. De la question précédente, on déduit que

$$f\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \quad , \qquad \text{soit} \qquad \frac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \;;$$

soit l'inégalité demandée en faisant des "produits en croix" (*toutes les quantités en jeu sont positives*). *Remarque* : on pouvait aussi utiliser Cauchy-Schwarz.

d. La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, i.e. son opposé $-\ln$ est convexe. De la question **b.**, on déduit alors que $\ln\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$ et, en prenant l'exponentielle, cela donne $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$, ce qu'il fallait démontrer. On a ainsi prouvé l'**inégalité arithmético-géométrique** qui exprime que la **moyenne arithmétique** de n réels strictement positifs $x_1, \cdots, x_n$ est plus grande que leur **moyenne géométrique**, à savoir le nombre $\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i}$.

Formules de Taylor

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$.

a. Montrer que la suite (s_n) est bornée.

b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n$.

c*. En utilisant un développement limité de $x \mapsto \sin^2 x$ au voisinage de 0, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} t_n$.

- -

a. On utilise l'inégalité classique $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout t réel. On a donc

$$0 \leq s_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} \leq (n+1) \times \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \ ,$$

la suite (s_n) est bornée.

b. On reconnaît une somme de Riemann (avec un terme en trop, mais qui tend vers zéro):

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\dfrac{k}{n}} + \frac{1}{2n} \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(2) \ .$$

En effet, $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ *est continue sur* $[0,1]$ *et* $t_n - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f$.

c. *L'idée est bien sûr de dire que* $\sin^2(t)$ *est "voisin" de* t^2 *pour* t *proche de 0, donc que* s_n *est "voisin" de* t_n*. Formalisons!*

Posons $f(x) = \sin^2 x$. Un développement limité avec un reste en $o(x^k)$ (**formule de Taylor-Young**, à caractère local) est inadapté ici, car il ne permet pas de majorer explicitement le reste. Utilisons alors l'**inégalité de Taylor-Lagrange**, à caractère global:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{M\,|x|^{n+1}}{(n+1)!} \ , \qquad \text{avec} \qquad M = \max_{t\in[0,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \ .$$

Avec $f(x) = \sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, on a $f'(x) = \sin(2x)$, $f''(x) = 2\cos(2x)$, $f^{(3)}(x) = -4\sin(2x)$, $f^{(4)}(x) = -8\cos(2x)$, donc en appliquant cette inégalité à f avec $n = 3$ (et en prenant $M = 8 = \left\|f^{(4)}\right\|_\infty$), on déduit

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| = \left| \sin^2(x) - x^2 \right| \leq \frac{M\,x^4}{24} = \frac{x^4}{3} \ .$$

Puis

$$|s_n - t_n| \quad = \quad \left| \sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)^2 \right|$$

$$\leq \quad \sum_{k=0}^{n} \left| \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)^2 \right|$$
$$\leq \quad \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)^4 \leq \frac{n+1}{3n^2} \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0 \ .$$

Du **b.**, on déduit enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \ln(2)$.

7*. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f est à valeurs positives ou nulles, et que
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |f''(x)| \leq M \ .$$
Démontrer l'inégalité $\quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |f'(x)| \leq \sqrt{2\,M\,f(x)}$. *On pourra fixer un point a et utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange entre a et x pour majorer $f(x)$.*

- -

Fixons donc a réel, alors l'inégalité de Taylor-Lagrange donne
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Big| f(x) - f(a) - (x-a)\,f'(a) \Big| \leq \frac{M\,(x-a)^2}{2} \ ,$$
d'où
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \leq f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{M\,(x-a)^2}{2} \ .$$
Comme f est supposée positive, on a donc
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \frac{M}{2}\,(x-a)^2 + f'(a)\,(x-a) + f(a) \geq 0 \ .$$
En posant $X = x - a$, le trinôme $\dfrac{M}{2}\,X^2 + f'(a)\,X + f(a)$ est toujours positif, son discriminant est donc négatif ou nul (il ne peut avoir deux racines réelles distinctes), soit $f'(a)^2 - 2M\,f(a) \leq 0$, ou encore $|f'(a)| \leq \sqrt{2M\,f(a)}$, ce qu'il fallait démontrer.

Intégration des fonctions continues sur un segment

8. En considérant des sommes de Riemann, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

- -

Posons $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$. Alors

$$\begin{aligned}
v_n = \ln(u_n) \quad &= \quad \frac{1}{n}\,\ln\left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right) = \frac{1}{n}\Big[\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k - n\,\ln n\Big] \\
&= \quad \frac{1}{n}\Big[\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) - n\,\ln n\Big] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\ln(n+k) - \ln n\Big) \\
&= \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \ .
\end{aligned}$$

On reconnaît une expression de la forme $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ qui est une somme de Riemann pour la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ continue sur le segment $[0,1]$. D'après le cours de PCSI, on a (*intégrer par parties*) :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \Big[(1+x)\ \ln(1+x) - x\Big]_0^1 = 2\ln 2 - 1\ ,$$

donc (*continuité de la fonction exponentielle*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$.

---

9. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t+1}\,\mathrm{d}t$ est positive.

- -

Posons $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \geq 0$, avec $f(t) = \dfrac{\sin t}{t+1}$. Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ (en fait, même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}_+$, avec $F'(t) = f(t)$ du signe de $\sin t$. On en déduit le tableau de variations de F :
On note $\alpha_k = F(k\pi)$ pour $k \in \mathbb{N}$, alors $\alpha_0 = F(0) = 0$, puis les α_{2k+1} sont des maximums locaux, et les α_{2k} des minimums locaux. Pour montrer que F reste positive sur $\mathbb{R}_+$, il suffit de montrer que tous ses minimums locaux α_{2k}, avec $k \in \mathbb{N}^*$, sont positifs. Or,

$$\alpha_{2k} = \int_0^{2k\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{k-1} J_p\ , \qquad \text{avec} \quad J_p = \int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Et pour montrer que α_{2k} est positif, il suffit de montrer que tous les J_p sont positifs. Or,

$$\begin{aligned} J_p &= \int_{2p\pi}^{(2p+1)\pi} \frac{\sin t}{t+1}\,\mathrm{d}t + \int_{(2p+1)\pi}^{(2p+2)\pi} \frac{\sin t}{t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{2p\pi}^{(2p+1)\pi} \frac{\sin t}{t+1}\,\mathrm{d}t + \int_{2p\pi}^{(2p+1)\pi} \frac{\sin(t+\pi)}{t+\pi+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{2p\pi}^{(2p+1)\pi} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+\pi+1}\right)\,\sin t\,\mathrm{d}t\ , \end{aligned}$$

et le résultat est positif car on intègre une fonction positive sur un segment. *On a d'abord fait une translation de la variable pour se ramener à deux intégrales sur le même segment, puis on a utilisé* $\sin(t+\pi) = -\sin t$.

---

10. Soient a et b deux réels avec $a < b$. On note F l'ensemble des fonctions continues sur $I = [a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $f \in F$, on pose $P_f = \left(\displaystyle\int_I f\right)\left(\int_I \frac{1}{f}\right)$.

a. Déterminer le réel $m = \displaystyle\inf_{f\in F} P_f$.

b. Quelles sont les fonctions f de F telles que $P_f = m$?

c. L'ensemble $\{P_f\ ;\ f \in F\}$ est-il majoré ?

- -

a. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions $\sqrt{f}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ donne

$$P_f = \left(\int_I f\right)\left(\int_I \frac{1}{f}\right) \geq \left(\int_I \sqrt{f}\cdot\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2 = \left(\int_I 1\right)^2 = (b-a)^2\ .$$

Avec $f = 1$ (fonction constante), on a $P_f = (b-a)^2$, donc $m = \inf\limits_{f\in F} P_f = \min\limits_{f\in F} P_f = (b-a)^2$.

b. On a $P_f = m$ si et seulement si on est dans le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, autrement dit si et seulement si les fonctions $\sqrt{f}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ sont colinéaires, ce qui se produit si et seulement si f est constante (strictement positive, bien sûr).

c. Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $f_\varepsilon(x) = x - a + \varepsilon$ pour $x \in I$; on a $f_\varepsilon \in F$, et je laisse le lecteur vérifier que

$$\int_I f_\varepsilon = \int_a^b (x-a+\varepsilon)\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{2} + \varepsilon\,(b-a) \quad \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \quad \frac{(b-a)^2}{2}$$

et

$$\int_I \frac{1}{f_\varepsilon} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a+\varepsilon} = \ln(b-a+\varepsilon) - \ln\varepsilon \quad \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \quad +\infty\ ,$$

puis $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} P_{f_\varepsilon} = +\infty$, donc l'ensemble $\{P_f\ ;\ f \in F\}$ n'est pas majoré.

---

11. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$, $f' > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que, pour tout $a \geq 0$, on a

$$\textbf{(1) :}\qquad a\,f(a) = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(a)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

En déduire que, pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$, on a l'inégalité

$$\textbf{(2) :}\qquad ab \leq \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^b f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

- -

La fonction f est continue et strictement croissante, c'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers son image qui est ici aussi $\mathbb{R}_+$. La bijection réciproque f^{-1} est alors aussi continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On pose, dans la deuxième intégrale de **(1)**, le changement de variable $t = f(u) \iff u = f^{-1}(t)$, puis on fait une intégration par parties, cela donne

$$\int_0^{f(a)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a u\,f'(u)\,\mathrm{d}u = \big[u\,f(u)\big]_0^a - \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u = a\,f(a) - \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u\ :$$

la relation **(1)** est ainsi prouvée.

Fixons maintenant $a \geq 0$ et considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall b \in \mathbb{R}_+ \qquad \varphi(b) = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^b f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t - a\,b\ .$$

Alors φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $\varphi'(b) = f^{-1}(b) - a$, donc φ est décroissante sur l'intervalle $\big[0, f(a)\big]$, croissante sur l'intervalle $\big[f(a), +\infty\big[$, elle atteint donc un minimum au point $b = f(a)$, et ce minimum vaut

$$\varphi\big(f(a)\big) = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(a)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t - a\,f(a)\ ;$$

ce minimum est nul d'après **(1)**, on a donc $\forall b \in \mathbb{R}_+ \quad \varphi(b) \geq 0$, ce qui donne **(2)**.

---

12. Étude et représentation graphique de la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1} F(x)$.

- -

• Tout d'abord, $D_F = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} =]0,1[\, \cup\,]1,+\infty[$: en effet, la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est définie sur ce même ensemble et les bornes x et x^2 de l'intégrale sont toujours situées du même côté de la "valeur interdite" 1.

• Pour $x \in D_F$, on a $\ F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} g(t)\,\mathrm{d}t = G(x^2) - G(x)$, où G est une primitive (sur $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$, c'est selon) de la fonction g. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$, il en est donc de même de G, puis de F. Enfin,

$$\forall x \in D_F \qquad F'(x) = 2x\,G'(x^2) - G'(x) = 2x\,g(x^2) - g(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}\ .$$

• On a donc $\ \forall x \in D_F \quad F'(x) > 0$: la fonction F est strictement croissante sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

• Pour $x > 1$, on peut écrire $F(x) \geq (x^2 - x) \cdot \displaystyle\min_{t\in[x,x^2]} \left(\frac{1}{\ln t}\right) = \frac{x^2 - x}{2\ln x}$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

• Pour $x \in]0,1[$, on a $\ 0 \leq F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{|\ln t|} \leq (x - x^2)\cdot \max_{t\in[x^2,x]} \left(\frac{1}{|\ln t|}\right) = \frac{x - x^2}{|\ln x|} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} F(x) = 0$, on prolonge F par continuité en zéro en posant $F(0) = 0$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} F'(x) = 0$, la fonction F ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$, avec $F'(0) = 0$ (théorème de la limite de la dérivée).

• Lorsque t tend vers 1, on a $\ \ln(t) = \ln\big(1 + (t-1)\big) = (t-1) - \dfrac{(t-1)^2}{2} + o\big((t-1)^2\big)$, on en déduit que

$$r(t) := \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} = \frac{t - 1 - \ln t}{(t-1)\ \ln t} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ ;$$

autrement dit $\dfrac{1}{\ln t} = \dfrac{1}{t-1} + r(t)$, la fonction r étant bornée ($|r(t)| \leq M$) au voisinage du point 1 puisqu'elle admet en ce point une limite finie. Donc

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} + \int_x^{x^2} r(t)\,\mathrm{d}t = \ln(1+x) + R(x)\ ,$$

avec $|R(x)| \leq M|x^2-x|$, donc $\lim\limits_{x\to 1} R(x)=0$, donc $\lim\limits_{x\to 1} F(x)=\ln 2$. On peut donc prolonger la fonction F par continuité au point 1 en posant $F(1)=\ln 2$. Comme $\lim\limits_{x\to 1} F'(x)=1$, on déduit du théorème de la limite de la dérivée que la fonction F ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, avec $F'(1)=1$. Finalement, F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

---

13. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit le polynôme $A_n=\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\big[(X^2-1)^n\big]=\big((X^2-1)^n\big)^{(n)}$. À l'aide d'une intégration par parties itérée, montrer que, si P est un polynôme de degré strictement inférieur à n, on a

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,A_n(x)\,\mathrm{d}x=0\ .$$

En déduire que, si m et n sont deux entiers naturels distincts, alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} A_m(x)A_n(x)\mathrm{d}x=0$.

- -

Notons $B_n=(X^2-1)^n$; alors $A_n=B_n^{(n)}$ et, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[-1,1]$, en intégrant par parties n fois, on obtient, en posant $S=[-1,1]$:

$$\begin{aligned}
\int_S f\,A_n &= \int_S f\,B_n^{(n)}=\big[f\,B_n^{(n-1)}\big]_{-1}^{1}-\int_S f'\,B_n^{(n-1)}\\
&= -\big[f'\,B_n^{(n-2)}\big]_{-1}^{1}+\int_S f''\,B_n^{(n-2)}\\
&= \cdots\\
&= (-1)^k\int_S f^{(k)}\,B_n^{(n-k)} \qquad\qquad (0\leq k\leq n)\\
&= \cdots\\
&= (-1)^n\int_S f^{(n)}\,B_n
\end{aligned}$$

(à chaque fois, le terme entre crochets est nul, puisque les nombres 1 et -1 sont racines d'ordre n du polynôme B_n, donc sont racines de $B_n^{(k)}$ pour k de 0 à $n-1$). Il reste finalement

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,A_n(x)\,\mathrm{d}x=(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Si $f=P$ où P est un polynôme de degré strictement inférieur à n, alors $P^{(n)}=0$, donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)\,A_n(x)\,\mathrm{d}x=0$.

Enfin, si $m<n$, comme $\deg(A_m)=m<n$, on aura $\displaystyle\int_{-1}^{1} A_m(x)\,A_n(x)\,\mathrm{d}x=0$ d'après l'étude précédente, et aussi si $m>n$ puisque m et n jouent des rôles symétriques.

Remarque. Dans l'espace $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t$, on vient de montrer que la famille des polynômes $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est orthogonale, autrement dit $(A_m|A_n) = 0$ si $m \neq n$.

Intégrales généralisées, fonctions intégrables.

14. Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^\alpha \,\mathrm{d}x$ avec α réel ;

b. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^\alpha\, (\cos x)^\beta \,\mathrm{d}x$ avec α et β réels.

- -

a. La fonction $f : x \mapsto (1-x^2)^\alpha$ est continue et strictement positive sur $[0,1[$. L'intégrabilité de f équivaut donc à l'étude de la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^\alpha \,\mathrm{d}x$, ou encore par le changement de variable $x = 1-t$ (*cela conserve la nature de l'intégrale généralisée*) à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \big(1-(1-t)^2\big)^\alpha \,\mathrm{d}t$, le problème se posant maintenant en la borne 0. Or, au voisinage de zéro, on a

$$\big(1-(1-t)^2\big)^\alpha = (2t-t^2)^\alpha \underset{t\to 0}{\sim} 2^\alpha\, t^\alpha .$$

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{(1)} t^\alpha \,\mathrm{d}t = \int_0^{(1)} \frac{\mathrm{d}t}{t^{-\alpha}}$ étant convergente pour $-\alpha < 1$, c'est-à-dire $\alpha > -1$, on en déduit que f est intégrable sur $I = [0,1[$ si et seulement si $\alpha > -1$.

b. La fonction $f : x \mapsto (\sin x)^\alpha\, (\cos x)^\beta$ est continue et strictement positive sur l'intervalle $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; au voisinage de 0, on a $f(x) \sim x^\alpha$ donc, comme dans le **a.** ci-dessus, f est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha > -1$. Pour l'étude au voisinage du point $\frac{\pi}{2}$, le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ ramène l'étude de l'intégrale $\displaystyle\int_{(\frac{\pi}{4})}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^\alpha\, (\cos x)^\beta \,\mathrm{d}x$ à celle de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{(\frac{\pi}{4})} (\cos t)^\alpha\, (\sin t)^\beta \,\mathrm{d}t$, cette dernière intégrale étant convergente si et seulement si $\beta > -1$ (*échange des rôles de α et β*). Donc f est intégrable sur I si et seulement si $\{\alpha > -1 \ \text{ et } \ \beta > -1\}$.

---

15. Quelle est la nature des intégrales généralisées suivantes ?

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{t\, e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t \ ; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{(1-t)^3}} \,\mathrm{d}t \ ; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t \,\mathrm{d}t}{e^t - 1} \ ; \quad I_4 = \int_0^{+\infty} e^{-(\ln t)^2} \,\mathrm{d}t \ .$$

- -

• La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t\,e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $t^2\,f(t) = \dfrac{t^3\,e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} \sim t\,e^{-\sqrt{t}} \to 0$ en $+\infty$ puisque $t\,e^{-\sqrt{t}} = e^{\ln(t)-\sqrt{t}}$ et $\ln(t) = o(\sqrt{t})$ en $+\infty$. Donc $f(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ en $+\infty$, ce qui garantit l'intégrablité de f en $+\infty$, donc sur $\mathbb{R}_+$: l'intégrale I_1 est convergente.

• La fonction $g : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{(1-t)^3}}$ est continue sur $]0,1[$ (à valeurs négatives). On a $g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$, et on sait que la fonction ln est intégrable sur $]0,1]$, cela garantit l'intégrabilité de g en 0. De $\ln(t) \underset{t\to 1}{\sim} t-1$, on déduit $\big|g(t)\big| \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ puis, par changement de variable $x = 1-t$, la convergence de $\displaystyle\int_{(\frac{1}{2})}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ équivaut à la convergence de $\displaystyle\int_0^{(\frac{1}{2})} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$, ce qui est vrai d'après le cours. Donc g est intégrable sur $]0,1[$, ou encore l'intégrale I_2 est convergente.

• La fonction $h : t \mapsto \dfrac{t}{e^t-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0, de limite 1, et $t^2\,h(t) \sim t\,e^{-t} \to 0$ en $+\infty$, ce qui garantit son intégrabilité en $+\infty$. L'intégrale I_3 est donc convergente.

• La fonction $k : t \mapsto e^{-(\ln t)^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0, de limite nulle, et $t^2\,k(t) = e^{2\ln(t)-(\ln t)^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc l'intégrale I_4 est convergente.

---

16. Convergence et calcul des intégrales généralisées suivantes:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}\ ;\ I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}\ ;\ I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t\ ;\ I_4 = \int_0^{+\infty} \ln\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\mathrm{d}t\ .$$

- -

a. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{(t+1)(t+2)}$ est continue sur $[0,+\infty[$, et on a $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ d'où l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$ et l'existence de l'intégrale I_1. Pour le calcul, on décompose en éléments simples pour expliciter une intégrale partielle:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)} = \int_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\Big)\mathrm{d}t = \Big[\ln\Big(\frac{t+1}{t+2}\Big)\Big]_0^x = \ln\Big(\frac{x+1}{x+2}\Big) - \ln\Big(\frac{1}{2}\Big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)\ ,$$

donc $I_1 = \ln(2)$. *Attention au fait que, prises séparément, les intégrales* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$ *et* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$ *sont toutes deux divergentes.*

b. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$ est continue sur $[0,+\infty[$, et on a $g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}$ d'où l'intégrabilité de g sur $\mathbb{R}_+$ et l'existence de l'intégrale I_2. Le changement de variable $u = e^t$, i.e. $t = \ln(u)$ donne

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)\big(1+\frac{1}{u}\big)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2} = \Big[-\frac{1}{u+1}\Big]_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\ .$$

c. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{(1+t)^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, et on a $h(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$ d'où son intégrabilité en 0, et $t^{3/2}\ h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^{3/2}\ \ln(t)}{t^2} = \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où l'on déduit $h(t) = o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ et l'intégrabilité en $+\infty$. Après c'est une astuce: le changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$ donne

$$I_3 = -\int_{+\infty}^{0} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\left(1+\frac{1}{u}\right)^2}\ \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{(1+u)^2}\ \mathrm{d}u = -I_3\ ,$$

donc $I_3 = 0$.

d. La fonction $k : t \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$, et on a

$$k(t) = \ln\left(\frac{1}{t^2}(t^2+1)\right) = -2\ \ln(t) + \ln(1+t^2) \underset{t\to 0}{\sim} -2\ \ln(t)\ ,$$

d'où l'intégrabilité sur $]0,1]$, et $k(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ d'où l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$. Une intégration par parties, dont le lecteur s'assurera de la légitimité, donne

$$I_4 = \left[t\ \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi\ .$$

---

17. Convergence et calcul de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n}\ \mathrm{d}x$, avec n entier naturel.

- -

Notons d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrande est prolongeable par continuité en 0 avec une limite nulle (*intégrale "faussement généralisée en* 0*"*). En effet, en posant $X = \dfrac{1}{x}$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} = \lim_{X\to+\infty} X^n\ e^{-X} = 0$ par croissances comparées. Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$ donc $\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} \sim \dfrac{1}{x^n}$ lorsque x tend vers $+\infty$: la convergence de l'intégrale en la borne $+\infty$ est donc assurée si et seulement si $n > 1$, autrement dit pour $n \geq 2$ (n est entier).

Pour $n = 2$, on a $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\ \mathrm{d}x = \left[e^{-\frac{1}{x}}\right]_0^{+\infty} = 1$.

Ensuite, une intégration par parties (*on s'assurera de la convergence des différents termes obtenus*) donne, pour $n \geq 2$,

$$I_n = \left[-\frac{1}{n-1}\ \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{n-1}}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n-1}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}\ \mathrm{d}x = \frac{I_{n+1}}{n-1}\ ,$$

ou encore $I_{n+1} = (n-1)\, I_n$, soit encore $I_n = (n-2)\, I_{n-1}$ pour $n \geq 3$. Une récurrence immédiate donne enfin $I_n = (n-2)!$ pour tout $n \geq 2$.

---

18. Convergence et calcul des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}\, x} \quad ; \qquad J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} \quad ; \qquad K = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x\ .$$

- -

• D'abord, $0 \leq \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} \leq 2\, e^{-x}$ et la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (intégrale de référence), on en déduit l'intégrabilité de la fonction $\dfrac{1}{\mathrm{ch}}$ sur ce même intervalle, et donc la convergence de l'intégrale I. Pour son calcul, il suffit de chercher une primitive de $\dfrac{1}{\mathrm{ch}}$. Or, en posant $u = e^x$, on a (*calcul de primitive, donc à une constante près*):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}\, x} = \int \frac{2\, \mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}} \ = \ 2 \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = 2\ \mathrm{Arctan}(u) \ = \ 2\ \mathrm{Arctan}(e^x)\ .$$

Donc $I = \big[2\ \mathrm{Arctan}(e^x)\big]_0^{+\infty} = 2\Big(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\Big) = \dfrac{\pi}{2}$.

• La fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+2} = \dfrac{1}{(x+1)^2+1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et l'équivalence $g(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ garantit son intégrabilité sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \big[\,\mathrm{Arctan}(t)\big]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \pi\ .$$

Une primitive de g est donc la fonction $G : x \mapsto \mathrm{Arctan}(x+1)$.

• On applique la "règle de Riemann" (borne $+\infty$), on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} = \lim\limits_{X \to +\infty} X^4 e^{-X} = 0$ par croissances comparées (changement de variable $X = \sqrt{x}$), donc $e^{-\sqrt{x}} = o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ en $+\infty$, ce qui garantit l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$. Pour le calcul, on pose $u = \sqrt{x}$, ou $x = u^2$ (la fonction $u \mapsto u^2$ étant une bijection strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même), donc

$$K = \int_0^{+\infty} e^{-u}\, 2u\, \mathrm{d}u = \big[-2u\, e^{-u}\big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-u}\, \mathrm{d}u = \big[-2e^{-u}\big]_0^{+\infty} = 2$$

(l'intégration par parties étant justifiée parce que l'expression entre crochets admet une limite finie en $+\infty$).

---

19. Convergence et calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, |\sin t|\, \mathrm{d}t$.

- -

La fonction $f : t \mapsto e^{-t}\, |\sin t|$ vérifie $|f(t)| \leq e^{-t}$ donc est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (intégrale de référence). Par la relation de Chasles, on a alors $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} I_n$, avec $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t} |\sin t| \mathrm{d}t$.

Le changement de variable $t = x + n\pi$ donne $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-(x+n\pi)}\,|\sin(x+n\pi)|\,\mathrm{d}x = e^{-n\pi}\,I_0$, la fonction $x \mapsto |\sin x|$ étant π-périodique. Donc $I = I_0 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\pi} = \frac{I_0}{1-e^{-\pi}}$ (somme d'une série géométrique de raison $e^{-\pi}$). Il ne reste donc plus qu'à calculer I_0 :

$$I_0 = \int_0^{\pi} e^{-t}\,\sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\Big(\int_0^{\pi} e^{(-1+i)t}\,\mathrm{d}t\Big) = \mathrm{Im}\Big(\frac{e^{-\pi}e^{i\pi}-1}{-1+i}\Big) = \frac{1+e^{-\pi}}{2}\ .$$

Finalement, $I = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{coth}\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big)$. *Oui, c'est une "cotangente hyperbolique", fonction hors programme.*

---

20. On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que ces intégrales sont convergentes et que $I = J$.

b. Calculer $I + J$. En déduire I et J.

- -

a. La fonction $f : t \mapsto \ln(\sin t)$ est continue sur $\Big]0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$ et, au voisinage de 0, on a $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$, ce qui peut écrire $\sin(t) = t\,\big(1+\varepsilon(t)\big)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$, donc

$$\ln(\sin t) = \ln(t) + \ln\big(1+\varepsilon(t)\big) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)\ ,$$

le second terme (de limite nulle) étant négligeable devant le premier (de limite infinie). La fonction ln étant intégrable sur $]0,1]$ ou sur $\Big]0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$, on en déduit l'intégrabilité de f sur ce même intervalle, donc la convergence de l'intégrale I. Le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ montre que les intégrales I et J sont de même nature et sont égales en cas de convergence. Donc l'intégrale J converge et $J = I$.

b. On a

$$2I = I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t\,\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\Big(\frac{1}{2}\,\sin(2t)\Big)\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\,\ln(2) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

Or, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Big(I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u\Big)$ par le changement de variable $u = 2t$ puis la relation de Chasles. Enfin, en posant $v = \pi - u$, on a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\big(\sin(\pi - v)\big)\,(-\mathrm{d}v) = I$$

puisque $\sin(\pi - v) = \sin(v)$. Finalement, on a obtenu $2I = -\dfrac{\pi}{2}\,\ln(2) + I$, donc

$$I = J = -\frac{\pi}{2}\,\ln(2)\ .$$

---

21. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue, telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ soit convergente. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

a. Pour $x > 0$, montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

b. En déduire convergence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$.

- -

a. Les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(at)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$ sont convergentes puisqu'elles se ramènent aux intégrales $\displaystyle\int_{ax}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{bx}^{+\infty} \frac{f(v)}{v}\,\mathrm{d}v$ par les changements de variable $u = at$ et $v = bt$. Puis

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_x^{+\infty} \frac{f(at)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_x^{+\infty} \frac{f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{ax}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{bx}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \qquad (\textit{relation de Chasles}).
\end{aligned}$$

b. La continuité de f en 0 permet d'écrire $f(t) = f(0) + \varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$. On a donc, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(u)}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= f(0)\ \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(u)}{u}\,\mathrm{d}u\ .
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\left|\int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right| \le \int_{ax}^{bx} \frac{\left|\varepsilon(u)\right|}{u}\,\mathrm{d}u \le \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \max_{u\in[ax,bx]} \left|\varepsilon(u)\right|$. Or, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\max_{u\in[ax,bx]} \left|\varepsilon(u)\right|\right) = 0$ (*revenir à la définition de la limite pour s'en persuader!*), on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t = f(0)\ \ln\left(\frac{b}{a}\right)$, ce qui montre la convergence de l'intégrale proposée et fournit la relation $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t = f(0)\ \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

---

22. Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 2$.

a. Montrer la convergence de l'intégrale généralisée $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

b. Montrer les inégalités $\quad 0 \le I_\alpha \le \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

- -

a. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$.

- Au voisinage de 0, on a $f(t) \sim \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$, avec $\alpha - 1 < 1$, ce qui assure l'intégrabilité sur $]0,1]$.

- Montrons maintenant la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ (ce qui est moins fort que l'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$, cette dernière propriété n'étant pas forcément vraie ici) : il suffit pour cela de montrer que l'intégrale partielle $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Pour cela, on intègre par parties :

$$F(x) = \frac{\cos x}{x^\alpha} - \cos 1 - \alpha \int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t\ .$$

On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} = 0$, et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente (puisque l'intégrande est majoré en valeur absolue par $\dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$, intégrable sur $[1,+\infty[$ étant donné que $\alpha+1>1$), donc convergente, ce qui assure l'existence d'une limite finie pour l'intégrale partielle $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$.

b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $J_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. L'intégrande étant du signe de $(-1)^k$ sur l'intervalle $[k\pi,(k+1)\pi]$, l'intégrale J_k est elle-même du signe de $(-1)^k$, et $|J_k| = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. La suite $(|J_k|)$ est décroissante et tend vers zéro : en effet, par une translation de la variable, on a

$$|J_{k+1}| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(t+\pi)^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = |J_k|$$

puisque $\dfrac{|\sin t|}{(t+\pi)^\alpha} \leq \dfrac{|\sin t|}{t^\alpha}$ sur l'intervalle $[k\pi,(k+1)\pi]$. De plus,

$$|J_k| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(k\pi)^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(k\pi)^\alpha} \int_0^\pi |\sin t|\,\mathrm{d}t \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

Or, $I_\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} J_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k |J_k|$, le critère spécial des séries alternées permet donc d'affirmer que la somme est du même signe que le premier terme J_0, donc positive, ce qui donne $0 \leq I_\alpha$. De même, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} J_k = I_\alpha - J_0$ est du signe du premier terme J_1, donc négatif, ce qui donne $I_\alpha \leq J_0$; on a donc obtenu l'encadrement demandé.

23.a. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ (*sinus cardinal*) n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, mais que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est semi-convergente.

b. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ et $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite (J_n) est constante, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(J_n - K_n) = 0$, et en déduire que $I = \dfrac{\pi}{2}$.

d. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

- -

a. Vu en cours.

b. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut intégrer par parties, cela donne, pour $\lambda > 0$,

$$\int_a^b f(t)\,\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(f(a)\,\cos(\lambda a) - f(b)\,\cos(\lambda b) + \int_a^b f'(t)\,\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Avec, en vrac, l'inégalité triangulaire, la majoration de la valeur absolue d'une intégrale par l'intégrale de la valeur absolue, le fait que $|\sin| \le 1$, on a $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \le \dfrac{K}{\lambda}$, où K est une constante (indépendante de λ), par exemple $K = 2\|f\|_\infty + (b-a)\,\|f'\|_\infty$. On en déduit que cette intégrale (dépendant du paramètre λ) tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

c. Les intégrales J_n et K_n sont "faussement généralisées" en 0, puisque les intégrandes sont prolongeables par continuité en ce point, ayant pour limite $2n+1$. On a

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+3)t\big) - \sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,\cos\big((2n+2)t\big)\,\mathrm{d}t = 0$$

en utilisant la relation $\sin(p) - \sin(q) = 2\,\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\,\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$. La suite (J_n) est donc constante, donc pour tout n entier naturel, $J_n = J_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Ensuite,

$$J_n - K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t - \sin t}{t\,\sin t}\,\sin\big((2n+1)t\big)\,\mathrm{d}t\ ,$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(J_n - K_n) = 0$ par la question **b.** Notons que, pour appliquer cette question **b.**, il faut montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{t-\sin t}{t\,\sin t}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le **segment** $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ce qui nécessite une étude locale en zéro... qui est laissée au vaillant lecteur! On en déduit alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n = \lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$, mais par ailleurs, un changement de variable tout simple donne $K_n = \displaystyle\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ ("intégrale partielle" liée à l'intégrale généralisée I), on a donc aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n = I$. Finalement, $I = \dfrac{\pi}{2}$.

d. La fonction $g : t \mapsto \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car elle est prolongeable par continuité en zéro, de limite 1, et qu'elle est $O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$. Une intégration par parties (justifiée car l'expression entre crochets admet des limites finies en 0 et en $+\infty$) donne

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t &= \left[-\frac{\sin^2 t}{t}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin t\,\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ .\end{aligned}$$

---

24. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue, bornée. On pose $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\, f(x-t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et que $g'' = g - 2f$.

- -

On a $|f(x)| \leq M$, donc $\left|e^{-|t|}\, f(x-t)\right| \leq M\, e^{-|t|}$. L'application $t \mapsto e^{-t}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on déduit que l'application $t \mapsto e^{-|t|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et, par comparaison, pour tout réel x, l'application $t \mapsto e^{-|t|}\, f(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$. On peut écrire

$$g(x) = \int_{-\infty}^0 e^t\, f(x-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} e^{-t}\, f(x-t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

on pose $u = x - t$, cela donne

$$\begin{aligned}g(x) &= \int_x^{+\infty} e^{x-u}\, f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{-\infty}^x e^{u-x}\, f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= e^{-x}\int_{-\infty}^x e^u\, f(u)\,\mathrm{d}u + e^x \int_x^{+\infty} e^{-u}\, f(u)\,\mathrm{d}u\ .\end{aligned}$$

Ainsi écrit, les fonctions $u \mapsto e^u\, f(u)$ et $u \mapsto e^{-u}\, f(u)$ étant continues, il apparaît (*théorème fondamental de l'analyse*) que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et que

$$g'(x) = -e^{-x}\int_{-\infty}^x e^u\, f(u)\,\mathrm{d}u + e^x \int_x^{+\infty} e^{-u}\, f(u)\,\mathrm{d}u$$

(après annihilation des deux termes $f(x)$ et $-f(x)$). On voit maintenant que g' est de classe $\mathcal{C}^1$, donc g est de classe $\mathcal{C}^2$, avec

$$g''(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^x e^u\, f(u)\,\mathrm{d}u - e^{-x}e^x\, f(x) + e^x \int_x^{+\infty} e^{-u}\, f(u)\,\mathrm{d}u - e^x e^{-x}\, f(x)\ ,$$

soit $g''(x) = g(x) - 2f(x)$.

Remarque. On sait ainsi résoudre explicitement l'équation différentielle $y'' - y = f$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée, cela donne

$$y = A\, e^x + B\, e^{-x} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\, f(x-t)\,\mathrm{d}t\ .$$

25. Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2+1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2+4}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer leurs intégrales sur $]0,+\infty[$ sans passer par un calcul de primitive.

- -

• Pour l'intégrabilité sur $]0,1]$, on a $|f(x)| \sim |\ln x|$ et $|g(x)| \sim \dfrac{1}{4}|\ln x|$ au voisinage de zéro, la fonction ln étant intégrable sur $]0,1]$, donc f et g sont aussi intégrables sur cet intervalle.
• Pour l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$, utilisons le fait que $\ln x = o(\sqrt{x})$ au voisinage de $+\infty$, on en déduit que $f(x)$ et $g(x)$ sont tous deux négligeables devant $\dfrac{1}{x^{3/2}}$ lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^{3/2}}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$, donc f et g sont aussi intégrables sur cet intervalle.
• Astuce: en posant $x = \dfrac{1}{t}$, on a

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^1 \frac{-\ln t}{\dfrac{1}{t^2}+1}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right) = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\ ,$$

donc, en ajoutant les deux, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} f = 0$.
• En posant $x = 2u$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(2u)}{4(u^2+1)}\,2\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u + \frac{\ln 2}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}\ ,\end{aligned}$$

soit $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} g = \frac{\pi\ \ln 2}{4}$.

26*. Existence et calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$.

- -

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ si $t \neq 0$ et $h(0) = 1$. Cette fonction (appelée "sinus cardinal") est continue sur $\mathbb{R}$ puisque $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$. *Elle est même de classe $\mathcal{C}^\infty$ car on montre facilement qu'elle est développable en série entière sur* $\mathbb{R}$. Par ailleurs, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente. *Elle est semi-convergente, on montre classiquement par une i.p.p. que les intégrales partielles* $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ *admettent une* *limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.* Cela a alors un sens de poser $f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ pour tout x réel, et la fonction f ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $f'(x)=-\dfrac{\sin x}{x}$ si $x\neq 0$ et $f'(0)=-1$. *En effet, en posant* $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, *on a* $f(x)=I-\displaystyle\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$ *et on applique le théorème fondamental de l'analyse. Certains savent peut-être aussi que* $I=\dfrac{\pi}{2}$ *et que cette intégrale s'appelle intégrale de Dirichlet, mais ce n'est pas utile pour traiter l'exercice.*

Bref, intéressons-nous maintenant à une intégrale partielle $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $x>0$.

Une i.p.p., avec $u'=1$ et $v=f(t)$, donc $u=t$ et $v'=-\dfrac{\sin t}{t}$, donne

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\qquad F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=x\,f(x)-\cos x+1\ .$$

Par une autre i.p.p., on obtient

$$x\,f(x)=x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\cos x-x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

On n'oubliera pas de justifier soigneusement à l'oral les intégrations par parties quand elles ne sont pas posées sur un segment, comme c'est le cas ici.

On a donc $F(x)=1-x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Allez, une dernière i.p.p. et on obtient

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\ =\ 1+\frac{\sin x}{x}-2x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t\ .$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ et $\left|\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t^3}\mathrm{d}t\right|\leq\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}=\frac{1}{2x^2}$, d'où l'on tire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$.

On a ainsi prouvé que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que sa valeur est 1, ce que l'on peut écrire

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=1\ .$$

---

27. Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, continue, décroissante, et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

a. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

b. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\,f(x)=0$.

c*. Donner un exemple de fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, qui ne tend pas vers 0 à l'infini.

- -

a. Comme f est décroissante, par la propriété de croissance de l'intégrale, on a, pour tout $x \geq 0$,

$$f(x+1) \leq \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(x)\ ,$$

puis, pour tout $x \geq 1$, l'encadrement $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq \int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Introduisons la primitive de f qui s'annule en 0, c'est-à-dire $F : x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On vient de prouver les encadrements

$$\forall x \in [1, +\infty[\qquad F(x+1) - F(x) \leq f(x) \leq F(x) - F(x-1)\ .$$

Comme f est supposée intégrable sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente, donc la fonction F admet une limite finie l en $+\infty$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\big(F(x+1) - F(x)\big) = \lim_{x\to+\infty}\big(F(x) - F(x-1)\big) = 0$ puis, par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b. De **a.**, on déduit que f est positive sur $\mathbb{R}_+$. Puis, pour $x \geq 0$, par la décroissance de f, on obtient

$$F(x) - F\Big(\frac{x}{2}\Big) = \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \frac{x}{2}\, f(x) \geq 0\ .$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = l \in \mathbb{R}$, de nouveau par encadrement, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\, f(x) = 0$, soit $f(x) = o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$ en $+\infty$.

c. Pour construire un tel exemple, on fabrique une fonction f faisant des "pics" triangulaires de hauteur n et de base (largeur) $\dfrac{2}{n^3}$ à l'abscisse n pour tout entier naturel $n \geq 2$, et nulle en dehors des segments $\Big[n - \dfrac{1}{n^3}, n + \dfrac{1}{n^3}\Big]$ pour $n \geq 2$. La fonction f (*que l'improbable lecteur se fera un plaisir de représenter*) est alors continue, positive sur $\mathbb{R}_+$, et intégrable sur cet intervalle puisque ses intégrales partielles $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ ne dépasseront pas la valeur $M = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$. *On a d'ailleurs* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6} - 1$. Comme $f(n) = n$, la fonction f n'est pas bornée au voisinage de l'infini, et donc ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

---

28. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f(0) = 0$. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x \Big(\frac{f(t)}{t}\Big)^2 \mathrm{d}t \leq 2 \int_0^x \frac{f(t)\, f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t\ ,$$

après avoir prouvé la convergence des intégrales considérées.

- -

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $f(0) = 0$, elle admet en 0 le développement limité à l'ordre un: $f(t) = f'(0) \cdot t + o(t)$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{t\to0} \frac{f(t)}{t} = f'(0)$. Les fonctions $g : t \mapsto \Big(\dfrac{f(t)}{t}\Big)^2$ et

$h : t \mapsto \dfrac{f(t)\,f'(t)}{t}$ sont toutes deux continues sur $]0,x]$ pour tout $x > 0$, et prolongeables par continuité en 0 en posant $g(0) = h(0) = \big(f'(0)\big)^2$. Les intégrales considérées sont donc toutes deux "faussement généralisées".

Une intégration par parties donne alors

$$\int_0^x \Big(\frac{f(t)}{t}\Big)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)^2\,\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{f(t)^2}{t}\Big]_0^x + \int_0^x \frac{2\,f(t)\,f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t\ .$$

Cette i.p.p. est justifiée par le fait que le terme entre crochets admet une limite (nulle) en 0. Le crochet vaut finalement $-\dfrac{f(x)^2}{x}$, il est négatif, ce qui fournit l'inégalité demandée.