Calculs de déterminants.

1. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel E. Soit le vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, e_i$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les λ_i pour que la famille $(e_1 + x, \cdots, e_n + x)$ soit libre.

2. Par récurrence, calculer $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{(n)}$ et $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & 1 \end{vmatrix}_{(n)}$.

3. Soient a_1, a_2, …, a_n, b, c des réels avec $b \neq c$. Montrer que le déterminant

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & c + x & \ldots & c + x \\ b + x & a_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c + x \\ b + x & \ldots & b + x & a_n + x \end{vmatrix}_{(n)}$$

est une fonction affine du réel x. En déduire la valeur de $D(0)$.

4. Soit la matrice $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, avec $a_{i,j} = \binom{i+j}{i}$. Calculer $\det(A)$.

5. Calculer le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & (0) \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}_{(n)} .$$

6. Soient a_1, $\cdots$, a_n des nombres complexes. Soit $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $b_{i,j} = a_{\max\{i,j\}}$. Calculer $\det(B)$. En déduire $\Delta_n = \det\big((\max\{i,j\})_{1 \leq i,j \leq n}\big)$ et $\delta_n = \det\big((\min\{i,j\})_{1 \leq i,j \leq n}\big)$.

7. Soient $X = (x_1, \cdots, x_n)$ et $Y = (y_1, \cdots, y_n)$ dans $\mathbb{K}^n$ identifiés à des matrices-colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(I_n + X\,Y^\top) = 1 + X^\top Y$.

8*. Déterminant de Hurwitz

Soient a, x_1, $\cdots$, x_n des nombres complexes. Calculer $D = \begin{vmatrix} a + x_1 & & (a) \\ & \ddots & \\ (a) & & a + x_n \end{vmatrix}$.

Exercices théoriques.

9. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices réelles. On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$:

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \qquad PA = BP .$$

En décomposant P en $P = Q + iR$, où Q et R sont des matrices réelles, et en considérant l'application $f : \lambda \mapsto \det(Q + \lambda R)$, montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

10. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

a. Calculer $AA^\top$. En déduire $\det(A)$.

b*. Soient n et p deux entiers naturels. On suppose que n et p peuvent chacun s'écrire comme une somme de quatre carrés d'entiers naturels. Montrer que l'entier np est aussi somme de quatre carrés d'entiers naturels.

11.a. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \det(C+M) = \det(M)\ .$$

Montrer que $C = 0$. *En supposant $C \neq 0$, en s'aidant des colonnes de C, on pourra construire une matrice M inversible telle que $C + M$ ne soit pas inversible.*

b. Que dire de deux matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \det(A+M) = \det(B+M)\ ?$$

Déterminants de Vandermonde ou assimilés.

12. Soient a_0, a_1, …, a_n des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer que la famille de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ où, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P_i(X) = (X + a_i)^n$, est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. *On pourra utiliser un déterminant de Vandermonde.*

13*. Pour x réel et k entier naturel, on pose $(x)_k = \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(x-i)$. Ainsi $(x)_0 = 1$ et, si k est non nul, $(x)_k = x(x-1)\cdots(x-k+1)$. Soient $x_1, \cdots, x_n$ des nombres réels, montrer que

$$\det\left(\left((x_j)_{i-1}\right)_{1\le i,j\le n}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_1)_{n-1} & (x_2)_{n-1} & \cdots & (x_n)_{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i) = V(x_1, \cdots, x_n)\ ,$$

où V représente le déterminant de Vandermonde.

Déterminants de matrices par blocs.

14. Soient A, B, C, D des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $CD = DC$ et que D est inversible. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Montrer que $\det M = \det(AD - BC)$.

15. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soient $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, $N = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

a. Montrer que $\det(M) = \det(A+B)\ \det(A-B)$.

b. Montrer que $\det(N) \geq 0$.