CORRIGÉ du DM de MATHÉMATIQUES numéro 2
PSI2 2024-2025

PROBLÈME 1

1. Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, les fonctions X et Y sont leurs primitives qui s'annulent en 0, et sont alors aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $X' = x$, $Y' = y$.

2. Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction Y est croissante sur chaque intervalle $\left[\sqrt{2k\pi}\,,\sqrt{(2k+1)\pi}\,\right]$ ($k \in \mathbb{N}$), et décroissante sur chaque intervalle $\left[\sqrt{(2k+1)\pi}\,,\sqrt{(2k+2)\pi}\,\right]$ ($k \in \mathbb{N}$), d'où le tableau de variations

t	0		$\sqrt{\pi}$		$\sqrt{2\pi}$		$\sqrt{3\pi}$		$\sqrt{4\pi}$	$\cdots$
$Y'(t) = y(t)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$\cdots$
$Y(t)$	$m_0 = 0$	$\nearrow$	M_0	$\searrow$	m_1	$\nearrow$	M_1	$\searrow$	m_2	$\cdots$

3. Par la relation de Chasles, $m_{k+1} - m_k = \displaystyle\int_{\sqrt{2k\pi}}^{\sqrt{2(k+1)\pi}} \sin(u^2)\,\mathrm{d}u$. Le changement de variable $v = u^2$ donne

$$\begin{aligned}
m_{k+1} - m_k &= \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v \qquad \textbf{(1)} \\
&= \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v + \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin(v+\pi)}{2\sqrt{v+\pi}}\,\mathrm{d}v \qquad \textbf{(2)} \\
&= \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin(v)}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{v+\pi}}\right)\mathrm{d}v \qquad \textbf{(3)}
\end{aligned}$$

Commentaires: En **(1)**, relation de Chasles. En **(2)**, translation de la variable dans la deuxième intégrale. En **(3)**, on regroupe sous une seule intégrale en utilisant la relation $\sin(v+\pi) = -\sin(v)$.

La fonction que l'on intègre en **(3)** est positive dans l'intervalle $\left[2k\pi, (2k+1)\pi\right]$, d'où $m_{k+1} - m_k \geq 0$: la suite (m_k) est croissante. Comme $m_0 = 0$, les m_k sont tous positifs.

4. De la même façon,

$$M_{k+1} - M_k = \int_{\sqrt{(2k+1)\pi}}^{\sqrt{(2k+3)\pi}} \sin(u^2)\mathrm{d}u = \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+3)\pi} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}\mathrm{d}v = \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{\sin(v)}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{v+\pi}}\right)\mathrm{d}v \leq 0$$

avec les mêmes manipulations **(1)**, **(2)**, **(3)** que dans la question précédente, la fonction sinus étant cette fois négative sur le segment $\left[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi\right]$. La suite (M_k) est donc décroissante.

Enfin,

$$0 \leq M_k - m_k = \int_{\sqrt{2k\pi}}^{\sqrt{(2k+1)\pi}} \sin(u^2)\,\mathrm{d}u = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v \leq \pi \times \frac{1}{2\sqrt{2k\pi}} \quad \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0\ ,$$

en majorant sans grande finesse.

Donc $\lim\limits_{k\to+\infty}(M_k - m_k) = 0$ et les suites (m_k) et (M_k) sont adjacentes.

5. Il s'agit de montrer que la fonction Y (i.e. "les intégrales partielles" de J) admet une limite finie en $+\infty$. Il résulte du tableau de variations de la fonction Y que, pour tout k entier naturel, pour tout réel t tel que $t \geq \sqrt{2k\pi}$, on a $m_k \leq Y(t) \leq M_k$. *En effet, si $t \geq \sqrt{2k\pi}$, alors il existe un unique entier naturel n tel que $\sqrt{2n\pi} \leq t < \sqrt{2(n+1)\pi}$, c'est $n = \left\lfloor \dfrac{t^2}{2\pi} \right\rfloor$, le tableau de variations et le fait que $m_{n+1} \geq m_n$ montrent que $m_n \leq Y(t) \leq M_n$ puis, comme $n \geq k$, on a enfin $m_k \leq m_n \leq Y(t) \leq M_n \leq M_k$.*

Si l'on note μ la limite commune des suites adjacentes (m_k) et (M_k), et si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n tel que, pour tout $k \geq n$, on ait $\mu - \varepsilon \leq m_k \leq \mu \leq M_k \leq \mu + \varepsilon$ (*écrire la définition de la limite, en tenant compte de la croissance de la suite (m_k) et de la décroissance de la suite (M_k)*). Pour tout réel t tel que $t \geq \sqrt{2n\pi}$, on a alors $\mu - \varepsilon \leq Y(t) \leq \mu + \varepsilon$, soit $\big|Y(t) - \mu\big| \leq \varepsilon$. On a ainsi prouvé, en revenant à la définition de la limite d'une fonction en $+\infty$ que $\lim\limits_{t\to+\infty} Y(t) = \mu$, autrement dit l'intégrale généralisée J est convergente, et $J = \mu = \lim\limits_{k\to+\infty} m_k = \lim\limits_{k\to+\infty} M_k$.

Enfin, le théorème de stricte positivité montre que, pour tout k entier naturel,

$$m_{k+1} - m_k = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin(v)}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{v+\pi}}\right)\mathrm{d}v$$

est **strictement** positif (*on intègre en effet sur le segment $\big[2k\pi, (2k+1)\pi\big]$ une fonction continue, positive et non identiquement nulle*). La suite (m_k) est donc strictement croissante, donc $m_1 > m_0 = 0$. Comme $Y(t) \geq m_1$ pour $t \geq \sqrt{2\pi}$, par passage à la limite, on a aussi $J = \lim\limits_{t\to+\infty} Y(t) \geq m_1$ donc $J > 0$.

6. En posant encore $t^2 = v$, on a

$$\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin(t^2)|\,\mathrm{d}t = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(v)|}{2\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v \geq \frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(v)|\,\mathrm{d}v = \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\ .$$

La dernière égalité résulte de la π-périodicité de la fonction $|\sin|$ et de $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(v)\,\mathrm{d}v = 2$.

On en déduit, par la relation de Chasles, que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n\pi}} |\sin(t^2)|\,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$. La série de Riemann $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$, d'exposant $\dfrac{1}{2}$, étant divergente, on en déduit que les intégrales partielles de la fonction $t \mapsto |\sin(t^2)|$ ne sont pas majorées. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} |y(t)|\,\mathrm{d}t$

est donc divergente, autrement dit la fonction y n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En d'autres termes, l'intégrale généralisée J est “semi-convergente”.

7. Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\cos(u^2)\,\mathrm{d}u$, puisque l'intégrabilité sur le segment $[0,1]$ ne pose pas de problème. Or, si $t\geq 1$,

$$\int_1^t \cos(u^2)\,\mathrm{d}u=\int_1^{t^2}\frac{\cos(v)}{2\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v=\left[\frac{\sin(v)}{2\sqrt{v}}\right]_1^{t^2}+\frac{1}{4}\int_1^{t^2}\frac{\sin(v)}{v^{3/2}}\,\mathrm{d}v$$

et chaque terme admet une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$: le crochet tend vers $-\dfrac{\sin(1)}{2}$ et la majoration $\left|\dfrac{\sin(v)}{v^{3/2}}\right|\leq\dfrac{1}{v^{3/2}}$ prouve la convergence absolue, donc la convergence, de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(v)}{v^{3/2}}\mathrm{d}v$. L'intégrale I est semi-convergente elle aussi (*non demandé*). Pour la culture, I et J sont les **intégrales de Fresnel**.

8. Il s'agit d'une intégrale dépendant d'un paramètre, il faut donc retrousser les manches! Soit la fonction $g:\mathbb{R}_+\times[0,1]\to\mathbb{C},\ (t,u)\mapsto\dfrac{e^{it^2(1+u^2)}}{1+u^2}$, c'est parti:

- pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $u\mapsto g(t,u)$ est c.p.m. sur $[0,1]$, donc intégrable (segment) ;
- pour tout $u\in[0,1]$, $t\mapsto g(t,u)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $\dfrac{\partial g}{\partial t}(t,u)=2it\,e^{it^2(1+u^2)}$;
- pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $u\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial t}(t,u)$ est c.p.m. sur $[0,1]$;
- on a $\left|\dfrac{\partial g}{\partial t}(t,u)\right|=2t$, donc si $S=[a,b]$ est un segment inclus dans $\mathbb{R}_+$ $(0\leq a\leq b)$, alors

$$\forall(t,u)\in S\times[0,1]\qquad\left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,u)\right|\leq 2b\ ,$$

et la fonction constante $u\mapsto 2b$ est intégrable sur $[0,1]$ (condition de domination).

De tout cela, il résulte (théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre) que $f:t\mapsto\displaystyle\int_0^1 g(t,u)\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et que

$$f'(t)=\int_0^1\frac{\partial g}{\partial t}(t,u)\,\mathrm{d}u\ =\ 2it\int_0^1 e^{it^2(1+u^2)}\,\mathrm{d}u\ .$$

9. En posant $v=tu$ si $t>0$ (c'est évident si $t=0$), on a

$$f'(t)=\int_0^1 2it\,e^{it^2(1+u^2)}\,\mathrm{d}u=2it\,e^{it^2}\int_0^1 e^{it^2u^2}\,\mathrm{d}u\ =\ 2i\,e^{it^2}\int_0^t e^{iv^2}\,\mathrm{d}v\ .$$

Par ailleurs, par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $Z'(t)=e^{it^2}$. On a donc $f'(t)=2i\,Z'(t)\,Z(t)$, puis en primitivant, $f(t)=i\,Z(t)^2+C$ et, en évaluant pour $t=0$, on obtient $C=\dfrac{\pi}{4}$ d'où la relation demandée.

10. Pour $t>0$ et $\varepsilon\in]0,1[$, on écrit $\displaystyle\int_\varepsilon^1\frac{e^{it^2u^2}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2it^2}\int_\varepsilon^1(2iut^2\,e^{it^2u^2})\times\frac{1}{u(1+u^2)}\,\mathrm{d}u$, et on intègre par parties, voilà!

11. Fixons $\varepsilon \in]0,1[$. De **10.** et avec une inégalité triangulaire "classique" et une sur les intégrales, on déduit alors que, pour tout $t > 0$, on a $\left|\int_\varepsilon^1 \frac{e^{it^2u^2}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\right| \le \frac{K_\varepsilon}{t^2}$, avec par exemple

$$K_\varepsilon = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon^2)} + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 \frac{1+3u^2}{u^2(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$$

(quantité indépendante de t).

12. Donc, pour ε fixé dans $]0,1[$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_\varepsilon^1 \frac{e^{it^2u^2}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 0$. Il existe donc $T > 0$ tel que, pour $t \ge T$, on ait

$$\left|\int_\varepsilon^1 \frac{e^{it^2(1+u^2)}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\right| = \left|\int_\varepsilon^1 \frac{e^{it^2u^2}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\right| \le \varepsilon\ .$$

D'autre part, $\left|\int_0^\varepsilon \frac{e^{it^2(1+u^2)}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\right| \le \int_0^\varepsilon \mathrm{d}u = \varepsilon$. Par la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire, on tire, pour $t \ge T$, $|f(t)| = \left|\int_0^1 \frac{e^{it^2(1+u^2)}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\right| \le 2\varepsilon$. On a ainsi prouvé, en revenant à la définition de la limite, que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

13. De la relation obtenue en **9.**, on déduit alors $\lim\limits_{t\to+\infty} Z(t)^2 = i\frac{\pi}{4}$, soit $K^2 = i\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\,e^{i\frac{\pi}{2}}$. Puis

$$K = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4}}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i)\ .$$

Mais $J = \mathrm{Im}(K) > 0$ (question **5.**), on en déduit $K = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i)$, soit $I = J = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$.

PROBLÈME 2

PARTIE A. Généralités.

1. On a $0 \in \mathcal{C}(u)$, donc $\mathcal{C}(u)$ est non vide, puis, si $v \in \mathcal{C}(u)$, $w \in \mathcal{C}(u)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors

$$(\alpha v + w)\circ u = \alpha\, v\circ u + w\circ u = \alpha\, u\circ v + u\circ w = u\circ(\alpha v + w)\ ,$$

donc $\alpha v + w \in \mathcal{C}(u)$, et $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Si v et w appartiennent à $\mathcal{C}(u)$, alors par associativité

$$(v\circ w)\circ u = v\circ(w\circ u) = v\circ(u\circ w) = (v\circ u)\circ w = (u\circ v)\circ w = u\circ(v\circ w)\ ,$$

donc $v\circ w \in \mathcal{C}(u)$, cet ensemble est bien stable par la loi $\circ$

PARTIE B. Cas d'un endomorphisme nilpotent d'indice 2.

2. On a $u\circ u = 0$, ce qui s'écrit aussi $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Donc $\dim\big(\mathrm{Im}(u)\big) \le \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big)$, ce qui, à l'aide du théorème du rang, donne $r \le n - r$, soit $n - 2r \ge 0$, ou $s \ge 0$. Comme s est clairement un entier relatif, on a donc $s \in \mathbb{N}$.

3. Si G est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E, alors G est bien de dimension r. La famille de vecteurs $\big(u(e_1), \cdots, u(e_r)\big)$ est libre: en effet, si $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont des scalaires tels que

$$\lambda_1\, u(e_1) + \cdots + \lambda_r\, u(e_r) = 0_E\ ,$$

alors $u(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r) = 0_E$, donc le vecteur $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i$ appartient à $\mathrm{Ker}(u)$, mais il appartient aussi à G par construction, donc il est nul puisque G et $\mathrm{Ker}(u)$ sont en somme directe. Enfin, la famille $(e_1, \cdots, e_r)$ étant libre, on conclut que tous les scalaires λ_i sont nuls.

Ainsi, $\big(u(e_1), \cdots, u(e_r)\big)$ est une famille libre de r vecteurs de $\mathrm{Im}(u)$ qui est de dimension r, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(u)$.

Remarque. On peut aussi utiliser le théorème connu sous le nom de "forme géométrique du théorème du rang" qui affirme que, puisque G est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E, alors u induit un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im}(u)$.

4. Comme $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus G$, par associativité de la somme directe, on a $E = \mathrm{Im}(u) \oplus H \oplus G$. En concaténant une base de $\mathrm{Im}(u)$, une base de H et une base de G, on obtient donc une base de E "adaptée à cette décomposition". Comme $\dim(H) = (n - r) - r = s$, notons $(e'_1, \cdots, e'_s)$ une base de H. Ainsi, la famille $\mathcal{B} = \big(u(e_1), \cdots, u(e_r)\ ,\ e'_1, \cdots, e'_s\ ,\ e_1, \cdots, e_r\big)$ est une base de E. Les $r + s$ premiers vecteurs de cette base sont dans le noyau de u, donc ont une image nulle (i.e. les $r + s$ premières colonnes de la matrice sont nulles). Ensuite $e_1, \cdots, e_r$ ont pour images respectivement $u(e_1), \cdots, u(e_r)$ (*c'est une lapalissade*), d'où une diagonale de 1 qui forme un bloc matrice-identité I_r en haut à droite. Bref (*comme disait Pépin*), la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est bien celle proposée par l'énoncé, notons-la M.

5. Notons A la matrice avec les neuf blocs $A_1, \cdots, A_9$ comme dans l'énoncé. Effectuons les produits matriciels AM et MA, on obtient

$$AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_1 \\ 0 & 0 & A_4 \\ 0 & 0 & A_7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MA = \begin{pmatrix} A_7 & A_8 & A_9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Ainsi, $v \circ u = u \circ v \iff AM = MA \iff \{A_1 = A_9\ ,\ A_4 = 0\ ,\ A_7 = 0\ ,\ A_8 = 0\}$.

6. Les matrices commutant avec la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ sont donc exactement les matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0_{s,r} & A_5 & A_6 \\ 0_r & 0_{r,s} & A_1 \end{pmatrix}$, avec $A_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, $A_3 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $A_5 \in \mathcal{M}_s(\mathbb{K})$, $A_6 \in \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{K})$. Elles forment un sous-espace $\mathcal{V}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ isomorphe à $\mathcal{M}_r(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_r(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_s(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{K})$, donc de dimension $r^2 + rs + r^2 + s^2 + sr$, soit $(n - r)^2 + r^2$ (*vérification de calcul laissée au lecteur*).

Pour celles et ceux qui n'aiment pas les isomorphismes, on peut se contenter de compter les "degrés de liberté", c'est-à-dire le nombre de coefficients scalaires que l'on doit connaître les uns indépendamment des autres pour déterminer une matrice appartenant à $\mathcal{V}$.

Enfin, l'application $\Phi_{\mathcal{B}} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \right.$ étant un isomorphisme (*oui, encore un*), comme il envoie $\mathcal{C}(u)$ sur $\mathcal{V}$, on conclut que

$$\dim\big(\mathcal{C}(u)\big)=\dim(\mathcal{V})=(n-r)^2+r^2\ .$$

Pour finir, un calcul élémentaire donne

$$2\left(\dim\mathcal{C}(u)-\frac{n^2}{2}\right)=2\big((n-r)^2+r^2\big)-n^2=n^2-4nr+4r^2=(n-2r)^2=s^2\geq 0$$

ce qui montre que $\dim\big(\mathcal{C}(u)\big)\geq\dfrac{n^2}{2}$.

PARTIE C. Une autre étude d'exemple.

7. Les endomorphismes u et $(u-\mathrm{id}_E)^2$ commutent puisque ce sont des polynômes de l'endomorphisme u, on a donc aussi la relation $(u-\mathrm{id}_E)^2\circ u=0$, qui entraîne l'inclusion

$$\mathrm{Im}(u)\subset\mathrm{Ker}\,\big((u-\mathrm{id}_E)^2\big)=E_2\ .$$

Réciproquement, si $x\in\mathrm{Ker}\,\big((u-\mathrm{id}_E)^2\big)$, alors $u^2(x)-2u(x)+x=0_E$, autrement dit $x=2u(x)-u^2(x)=u\big(2x-u(x)\big)\in\mathrm{Im}(u)$.

On a donc prouvé l'égalité $E_2=\mathrm{Im}(u)$.

De cette égalité et du théorème du rang, on déduit que

$$\dim(E_1)+\dim(E_2)=\dim(\mathrm{Ker}\,u)+\mathrm{rg}(u)=n=\dim(E)\ .$$

Pour montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E, il ne reste plus alors qu'à montrer qu'ils sont en somme directe, i.e. d'intersection nulle. Or, si $x\in E_1\cap E_2$, on a $u(x)=0_E$ et $(u-\mathrm{id}_E)^2(x)=u^2(x)-2u(x)+x=0_E$, d'où l'on déduit que $x=0_E$.

On a donc bien $E=E_1\oplus E_2$.

8. Si v commute avec u, il laisse stables le noyau et l'image de u, qui sont justement E_1 et E_2.

9. L'endomorphisme u lui-même laisse stables les sous-espaces E_1 et E_2, par exemple d'après la question précédente puisque $u\in\mathcal{C}(u)$, d'où la forme diagonale par blocs de la matrice $M=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, avec les formats indiqués par l'énoncé.

Ensuite, $E_1=\mathrm{Ker}(u)$ donc les p premiers vecteurs de la base $\mathcal{B}$ ont une image nulle, d'où la nullité des p premières colonnes de la matrice.

Enfin, l'endomorphisme u_2 induit par u sur le sous-espace stable $E_2=\mathrm{Ker}\,\big((u-\mathrm{id}_E)^2\big)$ est tel que $(u_2-\mathrm{id}_{E_2})^2=0$, sa matrice M_2 relativement à une base quelconque de E_2 (*c'est le bloc en bas à droite*) vérifie alors $(M_2-I_q)^2=0_q$. En posant $N=M_2-I_q$, on a $N\in\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ telle que $N^2=0_q$ et $M_2=I_q+N$, ce qu'il fallait démontrer.

10. • Si v commute avec u, alors v laisse stables les sous-espaces E_1 et E_2 d'après **Q8.**, ce qui entraîne déjà que sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs de la forme $V=\begin{pmatrix}A&0\\0&D\end{pmatrix}$ avec $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D\in\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$. Ensuite la condition $u\circ v=v\circ u$ se traduit matriciellement par $MV=VM$ et, par un calcul par blocs immédiat, ceci entraîne la condition $DN=ND$.

• Réciproquement, si v est représenté dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice de la forme $V=\begin{pmatrix}A&0\\0&D\end{pmatrix}$ avec $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D\in\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $DN=ND$, alors il est immédiat de vérifier que les matrices M et V commutent, donc les endomorphismes u et v commutent.

11. D'après la question **6.**, l'ensemble $\mathcal{H}$ des matrices $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ telles que $DN = ND$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ de dimension $(q-r)^2 + r^2$. Comme le bloc A peut être choisi quelconque dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, l'espace vectoriel $\mathcal{C}(u)$, d'après la question précédente, est isomorphe à l'espace vectoriel produit $\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{H}$, donc

$$\dim\big(\mathcal{C}(u)\big) = p^2 + (q-r)^2 + r^2 \ .$$

12. On a vu en **Q6.** que $(q-r)^2 + r^2 \geq \dfrac{q^2}{2}$. Si $q \geq 2$, il en résulte facilement que $(q-r)^2 + r^2 \geq q$, cette dernière inégalité étant par ailleurs évidente si $q = 1$ ou $q = 0$ avec $0 \leq r \leq q$. Comme on a aussi $p^2 \geq p$, par addition d'inégalités de même sens, on déduit

$$\dim\big(\mathcal{C}(u)\big) = p^2 + (q-r)^2 + r^2 \geq p + q = n \ .$$