

DM de MATHÉMATIQUES numéro 2 COMMENTAIRES
PSI2 2024-2025

PROBLÈME 1

Ce sujet d'analyse demandait dès le début une étude assez fine de signes et de variations, qui a échappé à un assez grand nombre d'entre vous, mon sentiment est que c'est souvent par manque d'approfondissement et de rigueur. Dans une petite moitié des copies toutefois, cette étude a été correctement menée.

1. Une remarque: est-ce bien utile d'introduire une notation comme F pour désigner une primitive de $x : t \mapsto \sin(t^2)$ et dire ensuite que $X(t) = F(t) - F(0)$? Ne suffit-il pas de dire que, d'après le **théorème fondamental de l'analyse** (*merci de citer le nom de ce théorème*), X est déjà une primitive de x , plus précisément celle qui s'annule en 0 ?

Utilisez le bon vocabulaire: X est une **primitive** de x , et pas une **intégrale** de x (terme qui serait trop vague)!

Une erreur vue dans plusieurs copies: si x est une fonction continue, la dérivée de $X : t \mapsto \int_0^t x(u) du$ est $X'(t) = x(t)$, et certainement pas $x(t) - x(0)$!!!

Il y a encore des erreurs autour de ce "théorème fondamental" qui n'est pas aussi connu qu'il devrait l'être!

2. Souvent bien traité. Attention toutefois, la fonction sinus est périodique, la fonction $y : t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas périodique, *cf.* représentation graphique au verso

Une erreur voisine: les réels de la forme $\sqrt{k\pi}$ ne sont pas "0 modulo $\sqrt{\pi}$ ".

3. Il faut commencer à faire preuve d'un peu de finesse pour obtenir le signe de $m_{k+1} - m_k$.

Dans certaines copies, on lit des affirmations fausses et parfois contradictoires sur le signe de la fonction sinus, il y a peut-être aussi quelques confusions entre $(2k+1)$ et $2(k+1)$, bref des erreurs qui n'auraient pas résisté à une analyse menée de façon minutieuse.

5. Il faut en fait montrer que $Y(t)$ admet une limite finie lorsque le réel t tend vers $+\infty$. Si on note l la limite commune des suites adjacentes (m_k) et (M_k) , on déduit facilement que $Y(\sqrt{k\pi}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l$. **MAIS CELA NE SUFFIT PAS!** C'est exactement comme si

vous affirmiez la convergence d'une suite alors que vous n'avez étudié qu'une suite extraite, par exemple celle des termes d'indices pairs! En considérant les suites (m_k) et (M_k) , vous n'avez d'informations que sur les valeurs de la fonction Y en les points de la forme $\sqrt{k\pi}$ avec $k \in \mathbb{N}$. Mais que se passe-t-il entre deux points consécutifs de cette forme ? La fonction Y pourrait faire plein de bêtises entre $\sqrt{k\pi}$ et $\sqrt{(k+1)\pi}$... Il faut donc mentionner d'autres arguments, *cf.* corrigé. C'est une question difficile et je n'ai vu aucune réponse acceptable.

Remarque. On aurait pu aussi montrer la convergence de l'intégrale généralisée J en utilisant une intégration par parties.

6. Question en général assez bien traitée. Il aurait été bien de conclure en disant que y n'est pas intégrable car les "intégrales partielles" de $|y|$ ne sont pas majorées.

7. Plutôt bien traité. Oui, c'est sans doute plus facile de procéder comme cela que comme dans la question 5.

8. Traité plutôt correctement par les 5/2.

11. Ce n'est pas la peine de passer trop de temps à chercher une expression simple et jolie de K_ε , sa valeur précise ne servira à rien, il suffit de montrer l'existence d'un tel réel (indépendant de t).

12. L'énoncé dirigeait vers une démonstration "à la Cesaro", *cf.* corrigé. Je n'ai vu aucune rédaction satisfaisante de cette question.

PROBLÈME 2

Problème d'algèbre pas très difficile et souvent assez bien traité. La question 7. a tout de même donné lieu à un joli festival de vecteurs élevés au carré!!!

3. Quelques démonstrations inutilement compliquées en complétant la famille libre (e_1, \dots, e_r) en une base de E .
4. Souvent bien traité, avec parfois aussi quelques complications inutiles dans la rédaction.
6. J'aurais bien aimé quelques petites explications, par exemple une phrase en français pour dire que ce que l'on recherche est le nombre de "degrés de liberté", c'est-à-dire le nombre de coefficients scalaires à choisir indépendamment les uns des autres pour construire la matrice relativement à la base \mathcal{B} d'un endomorphisme appartenant à $\mathcal{C}(u)$.
7. Question traitée souvent un peu maladroitement et, bien pire encore, avec un grand nombre d'horreurs comme des $(u(x) - x)^2$!!! Et il y en a même (*je ne donnerai pas de noms!*) qui, partant de $(u(x) - x)^2 = 0_E$, arrivent à en déduire que $u(x) = x$!!!

NON MAIS, RÉFLÉCHISSEZ UN PEU AVANT D'ÉCRIRE!

8. Il suffit peut-être de citer un théorème du cours.
9. Pas toujours traité alors que ce n'est pas une question bien difficile.
10. Attention à la rédaction! On demande de démontrer une condition **nécessaire et suffisante** (un "si et seulement si"). On peut alors rédiger un raisonnement par double implication (ce que je propose dans le corrigé). On peut aussi envisager un raisonnement par équivalences, à condition de ne pas mettre au milieu de tout cela des "donc" ce qui reviendrait à "rompre la chaîne des équivalences", la conjonction "donc" signifiant en effet que l'on va énoncer simplement une condition nécessaire!

Et voici, comme promis, la courbe représentative de $y : t \mapsto \sin(t^2)$, fonction qui n'est pas périodique!

