Suites de fonctions. Études d'exemples.

1. a. Étudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions (f_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad f_n(x) = (n+1)\ \cos^n x\ \sin x\ .$$

b. Comparer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

- -

a. • Si on fixe $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on montre facilement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ (en traitant à part le cas $x = 0$), donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

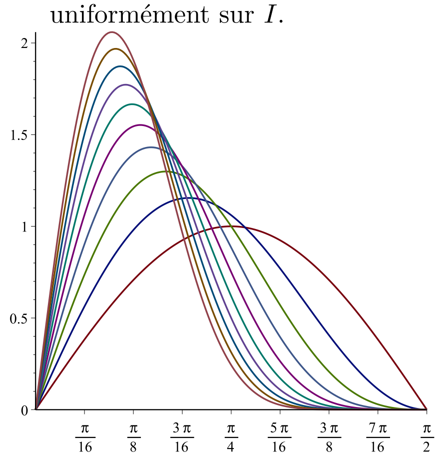
• Étudions les variations de la fonction f_n sur I : on a

$$f_n'(x) = -n(n+1)\ \sin^2 x\ \cos^{n-1} x + (n+1)\ \cos^{n+1} x = (n+1)\ \cos^{n-1} x\,(\cos^2 x - n\ \sin^2 x)\ .$$

La dérivée $f_n'(x)$ s'annule au point $\dfrac{\pi}{2}$ et au point $\alpha_n \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan^2 \alpha_n = \dfrac{1}{n}$, soit $\alpha_n = \arctan \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Des relations trigonométriques $\dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$ et $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on déduit $\cos^2 \alpha_n = \dfrac{n}{n+1}$ et $\sin^2 \alpha_n = \dfrac{1}{n+1}$. La fonction f_n est positive, s'anuule en 0 et en $\dfrac{\pi}{2}$, est croissante sur $[0, \alpha_n]$ et décroissante sur $\left[\alpha_n, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (*faire un tableau de variations*), donc

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in I} \left|f_n(x)\right| = f_n(\alpha_n) = (n+1) \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}\ ,$$

donc $\|f_n\|_\infty = \sqrt{n+1}\ \exp\left(-\dfrac{n}{2}\ \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{n}{e}}$ (*l'argument de l'exponentielle tend vers* $-\dfrac{1}{2}$). On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = +\infty$ et la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur I.



b. On observe la situation de "bosse grimpante", le lecteur vérifiera que $\displaystyle\int_I f_n = 1$ pour tout n (l'aire sous la courbe est constante), alors que $\displaystyle\int_I \lim_{n\to+\infty} f_n = 0$.

2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{n\,(1+x^n)}\ .$$

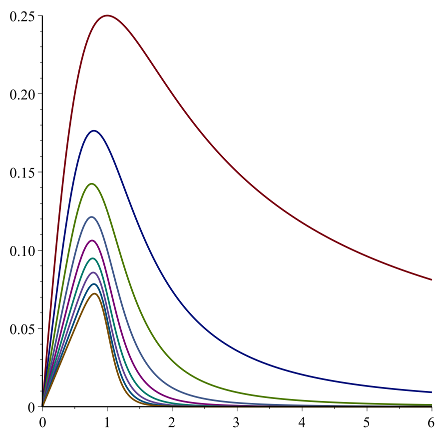
- -

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{x}{n}$ donc, par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$: la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Chaque fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $f_n'(x) = \dfrac{1-(n-1)x^n}{n\,(1+x^n)^2}$. Pour $n \geq 2$, en posant $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$, la fonction f_n est nulle en 0, croissante sur $[0, x_n]$, décroissante sur $[x_n, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$. Elle est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$ avec $\|f_n\|_\infty = \displaystyle\max_{x\in\mathbb{R}_+} f_n(x) = f_n(x_n)$. On calcule

$$f_n(x_n) = \frac{\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}}{n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = \frac{n-1}{n^2}\,\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}\ .$$

Comme $\sqrt[n]{n-1} = e^{\frac{1}{n}\ln(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 0$, ce qui caractérise la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite (f_n) vers la fonction nulle.



---

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $I = \,]-\pi, \pi[$ par

$$f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n\,\sin(x)} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad ; \quad f_n(0) = 0\ .$$

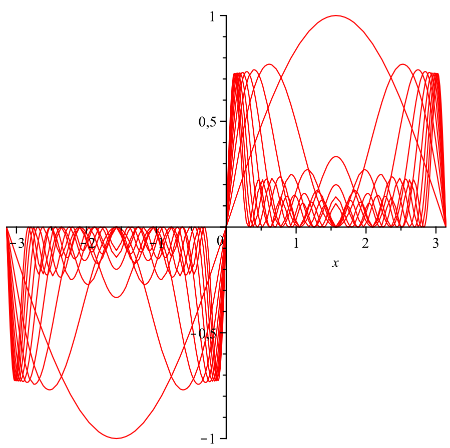
Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de la forme $J = [\,a\,,\,\pi - a\,]$, avec $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. La convergence est-elle uniforme sur I ? *On calculera* $f_n\!\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

- -

• On a bien sûr $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$ et, si $x \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$, alors la majoration $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n\,|\sin x|}$ montre (théorème d'encadrement) que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. On a donc convergence simple de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction nulle sur I.

• Fixons a avec $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$. Pour $x \in [a, \pi-a]$, on a $\sin x \geq \sin a > 0$, d'où $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n\,\sin a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\,\sin a} = 0$, on déduit la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction nulle sur l'intervalle $J_a = [a, \pi - a]$. *En effet, on a* $\max_{x\in J_a} |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n\,\sin a}$ *donc* $\lim_{n\to+\infty} \left(\|f_n\|_{\infty,J_a}\right) = 0$ *ce qui est une caractérisation de la convergence uniforme.*

• On a $f_n\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) = \dfrac{1}{n\,\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{\pi}$ (en utilisant l'équivalent $\sin\theta \sim \theta$ lorsque θ tend vers 0). La suite de fonctions (f_n) ne converge donc pas uniformément vers la fonction nulle sur I : *en effet, on a* $\max_{x\in I} |f_n(x)| \geq f_n\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$ *donc ce maximum ne tend pas vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$. (On note sur le graphique que des "bosses" dont la hauteur ne semble pas se réduire existent au voisinage des points $-\pi$, 0 et π).*



4*. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction P_n sur $\mathbb{R}$ par $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

a. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ fixé. Montrer que, pour n assez grand, on a $P_n(x) = \dfrac{\sin x}{2^n\,\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$.

b. Démontrer la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (P_n). On notera P la fonction limite simple.

c. Calculer $P_n(2^n\pi)$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

- -

a. • Si le réel x est un multiple de π, soit $x = m\pi$ avec $m \in \mathbf{Z}^*$, alors on peut écrire l'entier relatif m sous la forme $m = 2^p\, r$ avec $p \in \mathbb{N}$ et r entier relatif **impair** (l'exposant p est la 2-valuation de $|m|$, c'est-à-dire l'exposant du facteur 2 dans la décomposition de l'entier $|m|$ en produit de facteurs premiers) ; alors, si n est un entier tel que $n \geq p+1$, le produit $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k}$ contient le facteur $\cos\dfrac{x}{2^{p+1}} = \cos\left(r\,\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, donc $P_n(x)$ est nul. D'autre part, $\sin x = 0$ et, toujours pour $n \geq p+1$, $\sin\dfrac{x}{2^n}$ est non nul puisque $\dfrac{x}{2^n}$ n'est pas multiple de π, donc l'expression $\dfrac{\sin x}{2^n\ \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$ est bien définie et vaut zéro. Pour n assez grand, on a donc l'égalité voulue.

• Si x n'est pas multiple de π, alors $\sin\dfrac{x}{2^n}$ est non nul pour tout n entier naturel et, de la relation $\sin(2a) = 2\,\sin a\,\cos a$, on tire

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\dfrac{x}{2^{k-1}}}{2\,\sin\dfrac{x}{2^k}} = \frac{\sin x}{2^n\,\sin\dfrac{x}{2^n}}\ ,$$

après "télescopage".

b. Fixons $x \in \mathbb{R}^*$, alors pour n assez grand, on a $P_n(x) = \dfrac{\sin x}{2^n\,\sin\dfrac{x}{2^n}}$, et en utilisant l'équivalent classique $\sin u \sim u$ lorsque u tend vers 0, on déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \frac{\sin x}{x}$. Par ailleurs, $P_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n(0) = 1$. La suite de fonctions (P_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction sinc (sinus cardinal) définie par $\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

c. • On a

$$P_n(2^n\,\pi) = \prod_{k=1}^{n} \cos(2^{n-k}\,\pi) = \cos(2^{n-1}\,\pi)\cdots\cos(2\pi)\ \cos\pi = -1$$

(tous les facteurs valent 1, sauf le dernier qui vaut -1), alors que $P(2^n\,\pi) = 0$. On a donc

$$\|P - P_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|P_n(x) - P(x)\right| \geq \left|P_n(2^n\pi) - P(2^n\pi)\right| = 1\ ,$$

donc $\|P - P_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$: la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

• La dernière question est plus difficile. Soit $a > 0$, montrons que la convergence est uniforme sur le segment $S = [-a, a]$. Si n est un entier naturel tel que $\dfrac{a}{2^n} \leq \dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $n \geq N$ avec $N = \left\lfloor \dfrac{\ln(2a) - \ln\pi}{\ln 2} \right\rfloor + 1$, on a $P_n(x) = \dfrac{\sin x}{2^n\ \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$ pour tout $x \in S \setminus \{0\}$, puis, pour tout $x \in S \setminus \{0\}$ et tout $n > N$, on a

$$\big|P_n(x)-P(x)\big| = \left|\frac{\sin x}{2^n\,\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)} - \frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{2^n}\,\left|h\Big(\frac{x}{2^n}\Big)\right| \leq \frac{1}{2^n}\,\left|h\Big(\frac{x}{2^n}\Big)\right|\;,$$

en posant $h(u)=\dfrac{1}{\sin u}-\dfrac{1}{u}$. Or, $h(u)\sim\dfrac{u}{6}$ lorsque u tend vers zéro (petit développement limité facile), donc h est prolongeable en une fonction continue donc bornée sur le segment $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$\exists M\in\mathbb{R}_+^*\quad \forall u\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\qquad |h(u)|\leq M\;.$$

Pour $n\geq N$, on aura $\forall x\in S\quad \left|h\Big(\dfrac{x}{2^n}\Big)\right|\leq M$, donc

$$\forall n\geq N\quad \forall x\in S\qquad \big|P_n(x)-P(x)\big|\leq\frac{M}{2^n}$$

(pour $x=0$, on a $P_n(0)=P(0)$ pour tout n). Il y a donc convergence uniforme sur $S=[-a,a]$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}$.

---

5. Pour tout $t\in[-1,1]$, on pose $f_0(t)=2t$ puis, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_{n+1}(t)=\sqrt{2+f_n(t)}$. Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) sur $[-1,1]$. Déterminer les limites des suites (I_n), (J_n) et (K_n), avec

$$I_n=\int_{[-1,1]}f_n\quad;\qquad J_n=\int_{[-1,1]}\frac{1}{f_n}\quad;\qquad K_n=\int_{[-1,1]}\frac{f_n}{f_{n+1}}\;.$$

- -

Introduisons la fonction $\varphi:x\mapsto\sqrt{2+x}$. On a $D_\varphi=[-2,+\infty[$ et l'intervalle $I=[-2,2]$ (dans lequel se trouve $f_0(t)$) est stable par φ, ce qui garantit la bonne définition de $f_n(t)$ pour tout n: en effet, en fixant $t\in[-1,1]$ et en posant $x_n=f_n(t)$ pour tout n, on a $x_0\in[-2,2]$ et $x_{n+1}=\varphi(x_n)$. Plus précisément, la fonction φ étant croissante sur son ensemble de définition, son itérée k-ème $\varphi^k=\varphi\circ\cdots\circ\varphi$ (k facteurs) est aussi croissante, donc l'image par φ^k de l'intervalle I est $\varphi^k(I)=\varphi^k\big([-2,2]\big)=\big[\varphi^k(-2),2\big]$, puisque 2 est un point fixe de φ.

Une étude classique de suite récurrente montre que $\lim\limits_{k\to+\infty}\varphi^k(-2)=2$: en posant $u_k=\varphi^k(-2)$, on a $u_0=-2$ et $u_{k+1}=\varphi(u_k)$; l'intervalle I étant stable par φ, on a $u_k\in I$ pour tout k. Comme $\varphi(x)\geq x$ sur I, la suite (u_k) est croissante ; comme elle est aussi majorée par 2, elle converge. Enfin, le seul point fixe de φ est 2, donc $\lim\limits_{k\to+\infty}u_k=2$.

Soit maintenant $t\in[-1,1]$, on a $-2\leq f_0(t)=2t\leq 2$ et, la fonction φ^k étant croissante, on a

$$\forall k\in\mathbb{N}\qquad \varphi^k(-2)\leq f_k(t)=\varphi^k\big(f_0(t)\big)\leq\varphi^k(2)=2\;.$$

On en déduit, par le théorème d'encadrement que $\lim\limits_{k\to+\infty}f_k(t)=2$, soit la convergence simple sur $[-1,1]$ de la suite de fonctions (f_k) vers la fonction constante 2. Mais en fait cette convergence est uniforme sur $[-1,1]$ puisqu'on a la majoration **uniforme**

$$\forall t \in [-1,1]\ \forall k \in \mathbb{N} \qquad |f_k(t) - 2| \ = \ 2 - f_k(t) \ \leq \ 2 - \varphi^k(-2)\ ,$$

avec $\lim\limits_{k\to+\infty} \big(2 - \varphi^k(-2)\big) = 0$. Autrement dit, $\|f_k - 2\|_{\infty,[-1,1]} \leq 2 - \varphi^k(-2) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par une application directe du théorème d'interversion limite-intégrale (avec **convergence uniforme**, sur un **segment**), on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{[-1,1]} f_n = \int_{[-1,1]} \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_{-1}^{1} 2\ \mathrm{d}t = 4\ .$$

La suite de fonctions $g_n = \dfrac{1}{f_n}$ (définie sur $[-1,1]$ à partir du rang 2) converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction constante $\dfrac{1}{2}$ puisque, pour $n \geq 2$, on a, pour tout $t \in [-1,1]$, $\varphi^2(-2) = \sqrt{2} \leq f_2(t) \leq f_n(t) \leq 2$, donc

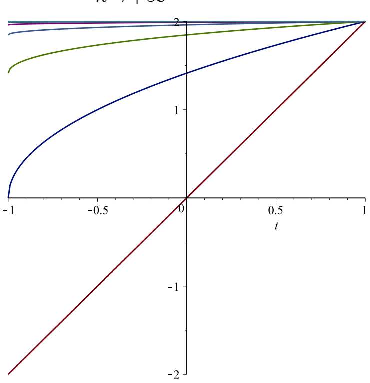
$$\forall t \in [-1,1] \qquad \left|\frac{1}{f_n(t)} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|2 - f_n(t)|}{2|f_n(t)|} \leq \frac{2 - f_n(t)}{2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\, \|f_n - 2\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

On peut donc aussi intervertir limite et intégrale, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\ \mathrm{d}t = 1$.

Enfin, la suite (h_n) définie (à partir du rang 1) par $h_n = \dfrac{f_n}{f_{n+1}}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction constante 1, puisque

$$\left|\frac{f_n(t)}{f_{n+1}(t)} - 1\right| = \frac{|f_n(t) - f_{n+1}(t)|}{|f_{n+1}(t)|} \leq \frac{2 - f_n(t)}{2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\, \|f_n - 2\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = 2$.



Suites de fonctions. Exercices théoriques.

6. Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément vers des fonctions f et g supposées bornées. Montrer que la suite de fonctions $(f_n g_n)$ converge uniformément vers la fonction fg.

- -

Sur l'intervalle I considéré, on a $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|g_n - g\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme $|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty$, pour n assez grand ($n \geq N$), la fonction f_n est bornée et vérifie $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty + 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, écrivons $f_n g_n - fg = f_n(g_n - g) - g(f - f_n)$, d'où pour tout $x \in I$ et $n \geq N$,

$$\begin{aligned} \bigl|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)\bigr| &\leq \bigl|f_n(x)\bigr|\,\bigl|g_n(x) - g(x)\bigr| + \bigl|g(x)\bigr|\,\bigl|f_n(x) - f(x)\bigr| \\ &\leq \|f_n\|_\infty\,\|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty\,\|f_n - f\|_\infty \\ &\leq \bigl(1 + \|f\|_\infty\bigr)\,\|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty\,\|f_n - f\|_\infty\ . \end{aligned}$$

Cette majoration étant valable pour tout $x \in I$, on déduit

$$\|f_n g_n - fg\|_\infty \leq \bigl(1 + \|f\|_\infty\bigr)\,\|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty\,\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ ,$$

ce qui montre bien la convergence uniforme de la suite $(f_n g_n)$ vers la fonction fg sur I.

---

7. On suppose qu'une suite de fonctions (f_n) de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ converge uniformément vers $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, et on considère une suite (x_n) d'éléments de $[a, b]$ convergeant vers x. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

- -

L'inégalité triangulaire donne

$$\bigl|f_n(x_n) - f(x)\bigr| \leq \bigl|f_n(x_n) - f(x_n)\bigr| + \bigl|f(x_n) - f(x)\bigr|\ .$$

Si on se donne $\varepsilon > 0$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, il existe un rang N à partir duquel on a $\|f_n - f\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq N$, on a alors $\bigl|f_n(x_n) - f(x_n)\bigr| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Par ailleurs, l'application f étant continue au point x, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$, donc il existe un rang N' au-delà duquel on a $\bigl|f(x_n) - f(x)\bigr| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq \max\{N, N'\}$, on a alors $\bigl|f_n(x_n) - f(x)\bigr| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

---

8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, de dérivée seconde bornée. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$g_n(x) = n\left[f\Bigl(x + \frac{1}{n}\Bigr) - f(x)\right]\ .$$

Étudier la convergence simple, puis uniforme, de la suite de fonctions (g_n).

- -

On reconnaît dans $g_n(x)$ l'expression d'un taux d'accroissement, on en déduit que, pour tout x réel, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = f'(x)$, la suite de fonctions (g_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f'.

Ensuite, en posant $M = \|f''\|_\infty$, l'inégalité de Taylor-Lagrange donne

$$\begin{aligned}\left|g_n(x)-f'(x)\right| &= n\left|f\Big(x+\frac{1}{n}\Big)-f(x)-\frac{1}{n}f'(x)\right|\\ &\leq n\,\frac{M}{2!}\Big(\frac{1}{n}\Big)^2 = \frac{M}{2n}\ ,\end{aligned}$$

d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|g_n-f'\|_\infty=0$: la convergence de (g_n) vers f' est uniforme sur $\mathbb{R}$.

---

9. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, positive et non identiquement nulle, telle que $f(0)=f(1)=0$. Pour tout n entier naturel non nul, on définit $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\begin{cases} n\,f(nx) & \text{si} \quad 0\leq x\leq \dfrac{1}{n}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$.

a. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0,1]$. Cette convergence est-elle uniforme ?

b. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,1]$ pour tout a tel que $0<a<1$.

c. Comparer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1\Big(\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\Big)\,\mathrm{d}x$.

- -

a. On a $f_n(0)=0$ pour tout n, et si $x>0$, il existe un rang N (dépendant de x) à partir duquel $\dfrac{1}{n}<x$; pour $n\geq N$, on a alors $f_n(x)=0$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc stationnaire de valeur nulle à partir du rang N, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0$. Ily a donc convergence simple de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

La fonction f n'étant pas la fonction nulle, et étant par ailleurs continue sur un segment, elle est bornée et atteint ses bornes, d'où l'existence de $M=\|f\|_\infty=\displaystyle\max_{x\in[0,1]}|f(x)|$ et on a $M>0$. L'expression $f(nx)$ prend, lorsque x décrit le segment $\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$, les mêmes valeurs que $f(x)$ lorsque x décrit $[0,1]$, on en déduit que $\|f_n\|_\infty=nM\ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ +\infty$, donc la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

b. Soit le segment $S=[a,1]$ avec $0<a<1$. Dès que l'entier n vérifie $\dfrac{1}{n}<a$ (c'est bien vrai à partir d'un certain rang), alors la fonction f_n est nulle sur S. On a donc $\|f_n\|_{\infty,S}=0$ pour n assez grand, d'où la convergence uniforme de la suite (f_n) vers la fonction nulle sur S.

c. Il résulte du théorème de stricte positivité que l'intégrale $J=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est un réel strictement positif. Le changement de variable $t=nx$ donne

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{n}} n\,f(nx)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=J\ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ J\ ,$$

alors que $\displaystyle\int_0^1\Big(\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\Big)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 0\,\mathrm{d}x=0$, il n'y a donc pas égalité entre limite de l'intégrale et intégrale de la limite.

Interprétation. L'aire sous la courbe reste constante, on peut le retrouver par des considérations géométriques. En effet, la région sous la courbe de f_n se déduit de celle sous la courbe de f par la transformation $u : (x,y) \mapsto \left(\dfrac{x}{n}, ny\right)$. Cette transformation u est linéaire (endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$), elle est représentée canoniquement par la matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$, dont le déterminant vaut 1, ce qui signifie que la transformation u conserve les aires. *Faire un dessin, en choisissant par exemple* $f : x \mapsto x(1-x)$.

Séries de fonctions.

10. Soit $\alpha > 0$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $u_n(x) = x^\alpha \, e^{-n^2 x}$. On posera $u_n(0) = 0$.

a. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

b. Étudier les variations de la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que la convergence de la série est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

c. Pour quelles valeurs de α la convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

- -

a. Pour $x = 0$, la série de terme général $u_n(0) = 0$ est évidemment convergente. Pour $x > 0$, on a $0 \leq u_n(x) \leq x^\alpha \, e^{-nx}$ et la série de terme général $x^\alpha \, e^{-nx}$ converge (c'est une série géométrique de raison $e^{-x} \in]0,1[$). Cela prouve la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.

b. On calcule $u_n'(x) = x^{\alpha-1} \, e^{-n^2 x} \, (\alpha - n^2 \, x)$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donné, la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, croissante sur $\left[0, \dfrac{\alpha}{n^2}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{\alpha}{n^2}, +\infty\right[$; on a $u_n(0) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$ (dresser un tableau de variations). Si on fixe $a > 0$, il existe un rang N à partir duquel $\dfrac{\alpha}{n^2} \leq a$ (*choisir* $N = 1 + \left\lfloor \sqrt{\dfrac{\alpha}{a}} \right\rfloor$ *pour ceux qui aiment les calculs explicites*). Pour $n \geq N$, la fonction u_n est décroissante sur $I = [a, +\infty[$ et on a donc $\|u_n\|_{\infty,I} = \displaystyle\max_{x\in[a,+\infty[} |u_n(x)| = u_n(a)$; comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(a)$ converge (*cf.* étude de la convergence simple), cela prouve la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

c. Notons maintenant $\|u_n\|_\infty = \displaystyle\max_{x\in\mathbb{R}_+} |u_n(x)| = u_n\left(\frac{\alpha}{n^2}\right) = \left(\frac{\alpha}{n^2}\right)^\alpha e^{-\alpha}$. On a donc $\|u_n\|_\infty = \dfrac{C}{n^{2\alpha}}$ où C est une constante (*nombre indépendant de* n) strictement positive. La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \|u_n\|_\infty$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$ (*c'est une série de Riemann*).

---

11. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n + n^2\, x^2}$.

a. Ensemble de définition de $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$? Étudier le mode de convergence de la série.

b. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- -

a. Si $x = 0$, la série de terme général $u_n(0) = \dfrac{1}{n}$ est divergente ; si $x \in \mathbb{R}^*$, $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2 n^2}$ (à termes positifs), donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge. Finalement, $D_f = \mathbb{R}^*$.

Il y a donc pour le moment convergence simple de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ sur $\mathbb{R}^*$. La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^*$, sinon le théorème de la double limite, appliqué en 0 (point adhérent à l'ensemble de définition) permettrait de conclure à la convergence de la série de terme général $\displaystyle\lim_{x\to 0} u_n(x) = \frac{1}{n}$, ce qui est réputé faux.

Si on veut espérer une convergence uniforme (ou même normale, soyons fous!), il faut certainement s'écarter de 0. Fixons donc $a > 0$, sur la demi-droite $I = [a, +\infty[$, on a $\|u_n\|_{\infty,I} = \displaystyle\max_{x\in I} |u_n(x)| = u_n(a)$ et la série de terme général $u_n(a)$ converge, *cf.* étude de la convergence simple. On a donc prouvé la convergence normale de la série sur la demi-droite $[a, +\infty[$. Par parité, on a le même résultat sur $]-\infty, -a]$. On en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment inclus dans $D_f = \mathbb{R}^*$. Les fonctions u_n étant continues sur D_f, la fonction somme f l'est aussi.

b. On peut être tenté de sommer les équivalents (*même si aucun théorème du cours n'autorise à le faire!*) : comme, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2 x^2}$, cela donnerait alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6x^2}$. Cela reviendrait en fait à prouver que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \frac{\pi^2}{6}$, et ce résultat peut être obtenu par une interversion somme-limite. Posons donc $v_n(x) = x^2\, u_n(x) = \dfrac{x^2}{n + n^2 x^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leq v_n(x) \leq \dfrac{1}{n^2}$, donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (on a trouvé une “série majorante” qui converge). On peut donc effectivement intervenir somme et limite en $+\infty$, ce qui donne

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\, f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x\to+\infty} v_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

---

12. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}$ lorsque la série est convergente. On notera $u_n(x) = e^{-n^2 x}$.

a. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout entier naturel k, exprimer $f^{(k)}(x)$ comme somme d'une série.

c. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

e. Posons $s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x)$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} s_n(x)$, en déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

- -

a. • Pour $x \leq 0$, la série est grossièrement divergente.

• Pour $x > 0$, on a $0 \leq e^{-n^2x} \leq e^{-nx} = (e^{-x})^n$ pour tout n, donc la série converge (comparaison à une série géométrique convergente).

On a donc $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

b. La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$ (en effet, sur un tel intervalle, on a $\|u_n\|_\infty = u_n(a)$, et la série de terme général $u_n(a)$ est convergente), donc f est continue sur $[a,+\infty[$ puisque chaque u_n l'est, puis f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u_n^{(k)}(x) = (-1)^k n^{2k}\, e^{-n^2x}$. Si $a > 0$ est fixé, pour tout $x \in [a,+\infty[$, on a $|u_n^{(k)}(x)| \leq |u_n^{(k)}(a)|$, et la série de terme général $|u_n^{(k)}(a)| = n^{2k}e^{-n^2a}$ converge (on vérifie par exemple que $n^2|u_n^{(k)}(a)| = e^{-n^2a+(2k+2)\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).

La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^{(k)}$ converge donc normalement sur $[a,+\infty[$, et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,+\infty[$. Comme ceci est vrai pour tout $a > 0$, la fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme, à savoir

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} n^{2k}\, e^{-n^2x} .$$

c. On a $f'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2\, e^{-n^2x} < 0$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, et la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[1,+\infty[$, on peut donc intervertir somme et limite en $+\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 1 .$$

e. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{x\to 0} u_k(x) = u_k(0) = 1$ (chaque fonction u_k est continue en 0), donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \lim_{x\to 0^+} s_n(x) = s_n(0) = n+1 .$$

Par ailleurs, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N}\ f(x) \geq s_n(x)$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. *En effet, si on se donne $A > 0$, soit n un entier tel que $n+1 > A$; comme* $\lim\limits_{x\to 0} s_n(x) = n+1$, *il existe $\alpha > 0$ tel que $0 < x \leq \alpha \Longrightarrow s_n(x) \geq A$: pour x tel que $0 < x \leq \alpha$, on aura alors a fortiori $f(x) \geq A$.*

Remarque. En encadrant par des intégrales, les 5/2 qui se souviennent de la valeur de l'intégrale de Gauss chercheront à démontrer que $f(x) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$ lorsque $x \to 0^+$.

---

13. On pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ (**fonction zéta de Riemann**). Quel est l'ensemble de définition de ζ ? Variations de la fonction ζ. Limite en $+\infty$. Équivalent en 1^+.

- -

L'ensemble de définition est $D = D_\zeta =]1, +\infty[$ (*cours sur les séries de Riemann*).

Chaque fonction $u_n : x \mapsto u_n(x) = \dfrac{1}{n^x} = n^{-x}$ est strictement décroissante sur D, donc ζ est strictement décroissante sur D par addition d'inégalités.

La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ définissant ζ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$ fixé : en effet, sur un tel intervalle, on a $\|u_n\|_\infty = \displaystyle\sup_{x\in[a,+\infty[} |u_n(x)| = u_n(a)$ terme général d'une série convergente. On peut donc intervertir somme et limite en $+\infty$. La fonction u_1 est constante de valeur 1, les autres fonctions u_n $(n \geq 2)$ tendent vers 0 en $+\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 1 .$$

Pour tout $x > 1$ fixé, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui autorise à utiliser la comparaison série-intégrale : on obtient l'encadrement $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$, la première inégalité étant valable pour $n \geq 1$, la deuxième pour $n \geq 2$. En sommant ces inégalités pour n de 1 à $+\infty$ (les séries et intégrales généralisées entrant en jeu sont convergentes), on obtient l'encadrement

$$\forall x \in D \qquad \frac{1}{x-1} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = 1 + \frac{1}{x-1} ,$$

d'où $\zeta(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.

14*. Pour $x > 0$, on pose $\xi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

a. Montrer que la fonction ξ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. En considérant, pour $x \in]0, 1[$ fixé, la fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{1}{(2t-1)^x} - \dfrac{1}{(2t)^x}$ pour $t \in [1, +\infty[$, donner un encadrement de $\xi(x)$, et déterminer $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \xi(x)$.

- -

a. Posons $u_n(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$. Pour $x>0$, la suite $\big(u_n(x)\big)_{n\geq 1}$ est alternée, sa valeur absolue est décroissante et tend vers zéro. Le théorème des séries alternées permet d'affirmer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$, donc la fonction ξ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on vient de prouver la convergence simple sur $\mathbb{R}_+^*$ de la série de fonctions $\sum u_n$. On a $u_n'(x)=\dfrac{(-1)^n\ \ln(n)}{n^x}$. Si on fixe a et b tels que $0<a<b$, pour tout $x\in S=[a,b]$, la suite $\left(\dfrac{\ln(n)}{n^x}\right)_{n\geq 2}$ tend vers 0 par croissances comparées, et elle est décroissante à partir du rang $N=1+\left\lfloor e^{\frac{1}{a}}\right\rfloor$: en effet, si on pose $g(t)=\dfrac{\ln(t)}{t^x}=t^{-x}\ \ln(t)$, on a $g'(t)=\dfrac{1-x\ \ln(t)}{t^{x+1}}$, donc $g'(t)$ est négatif dès que $t\geq e^{\frac{1}{x}}$, ce qui est bien vrai si on prend $t\geq e^{\frac{1}{a}}$. Par le théorème des séries alternées, on déduit la convergence de la série $\sum u_n'(x)$ et, à partir du rang N, la majoration du reste

$$|r_n(x)|=\Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k'(x)\Big|\leq |u_{n+1}'(x)|=\frac{\ln(n)}{(n+1)^x}\leq\frac{\ln(n)}{(n+1)^a}\ .$$

On a donc obtenu $\|r_n\|_{\infty,S}\leq\dfrac{\ln(n)}{(n+1)^a}$ et, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{(n+1)^a}=0$ par croissances comparées, on a obtenu la convergence uniforme sur le segment S de la suite de fonctions (r_n) vers la fonction nulle, c'est-à-dire la convergence uniforme sur S de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq N} u_n'$. Les fonctions u_n étant de classe $\mathcal{C}^1$, la somme $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} u_n$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ par théorème du cours. On ajoute enfin une somme finie de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, à savoir $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} u_n$, donc ξ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Comme elle est $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, finalement ξ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\qquad \xi'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\ \ln(n)}{n^x}\ .$$

b. En regroupant les termes deux par deux, on a $\displaystyle\xi(x)=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2p-1)^x}-\frac{1}{(2p)^x}\right)=\sum_{p=1}^{+\infty} g_x(p)$.

La fonction g_x est continue, positive, décroissante sur $[1,+\infty[$ puisque

$$g_x'(t)=-x\,2^{-x}\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^{-x-1}-t^{-x-1}\right]<0\ .$$

On peut donc envisager une comparaison série-intégrale: pour $p\geq 2$, on a

$$\int_p^{p+1} g_x(t)\,\mathrm{d}t\leq g_x(p)\leq\int_{p-1}^{p} g_x(t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

l'inégalité de gauche étant vraie aussi pour $p = 1$. La série $\sum_{p\geq 1} g_x(p)$ étant convergente, on déduit la convergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t$ (i.e. l'intégrabilité de la fonction g_x sur $[1, +\infty[$), ainsi il est licite de sommer les inégalités obtenues ci-dessus pour p allant de 2 à l'infini, on obtient

$$\int_1^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{p=1}^{+\infty} g_x(p) = \xi(x) \leq g_x(1) + \int_1^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Or, un calcul de primitive donne $\displaystyle\int g_x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(2t-1)^{1-x} - (2t)^{1-x}}{2\,(1-x)}$, cette expression a une limite nulle lorsque t tend vers $+\infty$ car

$$(2t-1)^{1-x} - (2t)^{1-x} = (2t)^{1-x}\left[\left(1 - \frac{1}{2t}\right)^{1-x} - 1\right] \underset{t\to+\infty}{\sim} -\frac{1-x}{(2t)^x} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ ,$$

il reste donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2^{1-x}-1}{2(1-x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$. Comme $g_x(1) = 1 - 2^{-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on déduit du théorème d'encadrement que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \xi(x) = \frac{1}{2}$.

---

15. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

a. Ensemble de définition de $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$? Étudier le mode de convergence de la série.

b. Étudier les variations de f sur son ensemble de définition. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+ (*on pourra encadrer $f(x)$ par des intégrales*).

- -

a. La série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ est grossièrement divergente pour $x \leq 0$ et, si $x > 0$, on a

$$n^2\,u_n(x) = n^2\,e^{-x\sqrt{n}} = e^{2\ln n - x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ est convergente : on a en effet $u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.

On a donc $D_f = \mathbb{R}_+^*$ (il y a convergence simple de la série de fonctions sur $\mathbb{R}_+^*$).

On ne peut espérer une convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ (sinon, le théorème de la double limite s'appliquerait au point 0 adhérent à l'intervalle, et la série de terme général $\lim_{x\to 0} u_n(x) = u_n(0) = 1$ serait convergente!).

Fixons $a > 0$ et montrons la convergence normale sur $J_a = [a, +\infty[$. Les fonctions u_n sont toutes positives et décroissantes sur $\mathbb{R}$ donc $\|u_n\|_{\infty,J_a} = \max_{x\in J_a} |u_n(x)| = u_n(a)$ et la série de terme général $u_n(a)$ converge (*d'après l'étude de la convergence simple ci-dessus*), donc il y a convergence normale de la série sur $J_a = [a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. En conséquence, il y a convergence normale (donc uniforme) sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

b. Les fonctions u_n sont toutes strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$, il en est donc de même de leur somme f (*évident*). On a $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_0(x) = 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[1, +\infty[$ donc le théorème de la double limite s'applique au point adhérent $+\infty$: on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geq 0}\Big(\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x)\Big)$ converge (*ça, ce n'est pas un scoop!*) et surtout que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\lim_{x\to+\infty} u_n(x)\Big) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 1 .$$

c. Pour tout $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a donc pour tout n entier naturel l'encadrement $e^{-x\sqrt{n+1}} \leq \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leq e^{-x\sqrt{n}}$, puis

$$\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t ,$$

la deuxième inégalité étant valable seulement à partir du rang 1. Par addition de ces inégalités, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leq f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t .$$

Remarque. La fonction $g : t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car continue sur cet intervalle avec $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 g(t) = 0$. Il ne reste plus qu'à calculer cette intégrale. Pour cela, posons $u = \sqrt{t}$, puis intégrons par parties:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} u\,e^{-xu}\,\mathrm{d}u = 2\left(\Big[-\frac{u}{x}\,e^{-xu}\Big]_{u=0}^{u\to+\infty} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xu}\,\mathrm{d}u\right) = \frac{2}{x^2} .$$

On a donc obtenu, pour tout $x > 0$, l'encadrement $\dfrac{2}{x^2} \leq f(x) \leq 1 + \dfrac{2}{x^2}$. Comme $1 = o\Big(\dfrac{2}{x^2}\Big)$ lorsque $x \to 0^+$, on a donc $f(x) \sim \dfrac{2}{x^2}$ au voisinage de 0. On en déduit notamment que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

16*. Soit $a \in]-1, 1[$. Montrer que l'on définit une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en posant

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n\,x) .$$

Démontrer la majoration $\quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \big|f^{(p)}(x)\big| \leq \dfrac{1}{1-|a|}$.

En déduire que f est somme, sur $\mathbb{R}$, de sa **série de Taylor en zéro** : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

- -

• Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $f_n(x) = \sin(a^n\, x)$. De $|\sin(a^n\, x)| \leq |a^n\, x|$, on déduit la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$. En fait, il y a convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}$ puisque, si $x \in [-M, M]$, on a $|f_n(x)| \leq |a|^n\, M$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |a|^n\, M$ converge ("série majorante"). On en déduit déjà la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$, alors $f_n^{(p)}(x) = a^{np}\, \sin\left(a^n\, x + p\,\dfrac{\pi}{2}\right)$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n^{(p)}(x)| \leq |a|^{np} = (|a|^p)^n\ .$$

On en déduit, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n^{(p)}$. On peut donc appliquer autant de fois que l'on veut le théorème de dérivation des séries de fonctions : il en résulte que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que ses dérivées à tout ordre se calculent par dérivation terme à terme, ce qui donne

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{np}\, \sin\left(a^n\, x + p\,\frac{\pi}{2}\right)\ .$$

• On a facilement une majoration uniforme des dérivées de f : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|f^{(p)}(x)\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(|a|^p\right)^n = \frac{1}{1-|a|^p} \leq \frac{1}{1-|a|}\ .$$

• Appliquons maintenant l'inégalité de Taylor-Lagrange:

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\right| \leq M_{n+1}\, \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\ ,$$

avec $M_{n+1} = \displaystyle\sup_{t\in[0,x]} \left|f^{(n+1)}(t)\right|$. Or, $M_{n+1} \leq \dfrac{1}{1-|a|}$, on obtient donc

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\right| \leq \frac{1}{1-|a|}\, \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\ .$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\right) = f(x)$, soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$. La fonction f est donc somme de sa **série de Taylor**, autrement dit f est **développable en série entière** sur $\mathbb{R}$, soit

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n!\,(1-a^n)}\, x^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!\,(1-a^{2k+1})}\, x^{2k+1} \ .$$

---

17. Pour $x > 0$, on pose $s(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

a. Montrer que s est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Préciser le sens de variation et la convexité de la fonction s.

c. Montrer que $s(x+1) + s(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

d. Donner un équivalent de s en 0.

e. Donner un équivalent de s en $+\infty$.

- -

a. Pour $x > 0$, la suite $\left(\dfrac{1}{n+x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers zéro, on en déduit par le théorème des séries alternées la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$. La série de fonctions $\sum u_n$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$, la fonction s est donc bien définie sur cet intervalle. De plus, les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^2$ avec $u_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ et $u_n''(x) = \dfrac{2\times(-1)^n}{(n+x)^3}$. On a $\|u_n'\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \dfrac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente, on a ainsi prouvé la convergence normale (donc uniforme) de la série de fonctions $\sum u_n'$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi la fonction s est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $s'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$.

De même, $\|u_n''\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \dfrac{2}{n^3}$, terme général d'une série convergente, d'où la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n''$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc s est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $s''(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n''(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)^3}$.

b. Pour $x > 0$, la suite $\left(\dfrac{1}{(n+x)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi décroissante de limite nulle. Le théorème des séries alternées s'applique de nouveau pour montrer que $s'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$ est du même signe que son premier terme, donc $s'(x) \leq 0$, et la fonction s est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le même raisonnement montre que $s'' \geq 0$, donc s est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque. Le théorème des séries alternées entraîne aussi que la somme $s(x)$ est de même signe que son premier terme, autrement dit $s(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. On calcule (toutes les séries entrant en jeu sont convergentes):

$$\begin{aligned} s(x+1)+s(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1+x}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} \\ &= \frac{1}{x}\ . \end{aligned}$$

d. La fonction s est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est donc continue au point 1, soit $\lim\limits_{x\to 0} s(x+1)=s(1)$ (qui vaut $\ln(2)$, mais ce n'est pas utile), donc $s(x)=\dfrac{1}{x}-s(x+1)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{1}{x}$, puisque le terme $s(x+1)$, qui est borné au voisinage de zéro, est négligeable devant le terme $\dfrac{1}{x}$.

e. La décroissance de la fonction s sur $\mathbb{R}_+^*$ permet d'écrire

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\qquad s(x+1)+s(x)\leq 2\,s(x)\leq s(x)+s(x-1)\ ,$$

soit $\dfrac{1}{2x}\leq s(x)\leq\dfrac{1}{2(x-1)}$, donc $s(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2x}$.

---

18. On étudie $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$.

a. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

c. On donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$. Donner le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0.

- -

a. Posons $u_n(x)=\dfrac{1}{n^2+x^2}$, les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a la majoration $0\leq u_n(x)\leq\dfrac{1}{n^2}$ qui montre la convergence simple (et même normale sur $\mathbb{R}$) de la série de fonctions $\sum u_n$. De plus, $u_n'(x)=\dfrac{-2x}{(n^2+x^2)^2}$ et, si on fixe $a>0$, pour tout $x\in[-a,a]$, on a $|u_n'(x)|\leq\dfrac{2a}{n^4}$, ce qui prouve la convergence normale, donc uniforme, de la série de fonctions $\sum u_n'$ sur tout segment de $\mathbb{R}$. Par théorème du cours, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. Pour $x>0$ fixé, la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^2+x^2}$ est continue, positive, décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'encadrement

$$\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}\leq\frac{1}{n^2+x^2}\leq\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}$$

puis, en sommant,

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+x^2}\leq\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}\ ,$$

soit $\dfrac{\pi}{2x}-\dfrac{1}{x}\ \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq f(x)\leq\dfrac{\pi}{2x}$. Comme le terme $\dfrac{1}{x}\ \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, équivalent à $\dfrac{1}{x^2}$, est négligeable devant $\dfrac{\pi}{2x}$ lorsque $x\to+\infty$, il reste $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi}{2x}$.

c. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$: en effet, on a $u_n''(x)=-2\dfrac{n^2-3x^2}{(n^2+x^2)^3}$ et, si $x\in[-a,a]$ avec $a>0$, alors $|u_n''(x)|\leq\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{6a^2}{n^6}$, terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum u_n''$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$. Donc f admet un développement limité à l'ordre deux en zéro qui est $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$. Il reste à calculer $f(0)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, $f'(0)=0$ et $f''(0)=-2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=-\frac{\pi^4}{45}$. Finalement,

$$f(x)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^4}{90}\,x^2+o(x^2)\qquad\text{au voisinage de } 0\ .$$

19*. Soit $z\in\mathbb{C}$. Par une interversion somme-limite, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z\ .$$

Retrouver le résultat en considérant module et argument de $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$.

- -

Attention à ne pas introduire de logarithme d'un nombre complexe!

• Par la formule du binôme, on a

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{z}{n}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\ \frac{z^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k(n)$$

en posant $u_k(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{x^k}\ \dfrac{z^k}{k!} & \text{si}\quad x\geq k\\ 0 & \text{si } 0\leq x<k\end{cases}$. Chaque fonction u_k admet une limite en $+\infty$, à savoir $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}u_k(x)=\frac{z^k}{k!}$. D'autre part, la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ puisque

$$\forall x\in\mathbb{R}_+\quad\forall k\in\mathbb{N}\qquad\big|u_k(x)\big|\leq\frac{|z|^k}{k!}\ ,$$

terme général d'une série convergente (indépendant de x). Le théorème de la double limite s'applique donc, et permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}u_k(n)\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}u_k(n)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z\ .$$

• *Autre méthode.* Posons $z=a+ib$ avec a et b réels. Alors $1+\dfrac{z}{n}=\left(1+\dfrac{a}{n}\right)+i\,\dfrac{b}{n}$, donc $\left|1+\dfrac{z}{n}\right|=\sqrt{\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^2+\dfrac{b^2}{n^2}}$, et le module de $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ est

$$r_n=\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right|=\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^2+\frac{b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\ .$$

Or, tout nombre complexe de la forme $x+iy$ avec x réel **strictement positif** et y réel quelconque, admet pour argument le réel $\theta=\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$.

Si $n>-a$, alors $\mathrm{Re}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)>0$ et ce qui précède s'applique: un argument de $1+\dfrac{z}{n}$ est alors $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{b}{n+a}\right)$. Un argument du nombre complexe $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ est alors

$$\theta_n=n\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{b}{n+a}\right)\ .$$

On a donc $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n=r_n\,e^{i\theta_n}$ pour n assez grand, avec les notations introduites ci-dessus. De l'équivalent classique $\mathrm{Arctan}(x)\underset{x\to0}{\sim}x$, on déduit facilement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\theta_n=b$. De plus,

$$\ln(r_n)=\frac{n}{2}\ \ln\left(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)=\frac{n}{2}\left(\frac{2a}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)\quad\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\quad a\ .$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}r_n=e^a$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^a\,e^{ib}=e^{a+ib}=e^z$.

Exercices avec Python.

20. Soit (P_n) la suite de fonctions polynomiales définies sur $[0,1]$ par

$$P_0(t)=0\qquad\text{et}\qquad\forall n\in\mathbb{N}\quad\forall t\in[0,1]\quad P_{n+1}(t)=P_n(t)+\frac{1}{2}\left(t-P_n(t)^2\right)\ .$$

a. On suppose que la suite de fonctions (P_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f. Déterminer la fonction f.

b. Sur le même schéma, représenter sur $[0,1]$ les fonctions P_n, pour n de 0 à 10, ainsi que la fonction f.

c. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}\quad\forall t\in[0,1]\quad 0\leq P_n(t)\leq\sqrt{t}$.

d. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}\quad\forall t\in[0,1]\quad 0\leq\sqrt{t}-P_n(t)\leq\sqrt{t}\left(1-\dfrac{\sqrt{t}}{2}\right)^n$.

e. En déduire que la suite de fonctions (P_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

f. En déduire que la fonction $x\mapsto|x|$ est limite uniforme sur $[-1,1]$ d'une suite de fonctions polynomiales. Illustrer avec Python.

- -

c. On procède par récurrence sur n : c'est évident si $n = 0$. Supposons les inégalités $0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}$ vraies pour un n donné, on a alors $t - P_n(t)^2 \geq 0$, donc $P_{n+1}(t) \geq P_n(t) \geq 0$, et

$$\begin{aligned} \sqrt{t} - P_{n+1}(t) &= \sqrt{t} - P_n(t) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} - P_n(t)\right)\left(\sqrt{t} + P_n(t)\right) \\ &= \left(\sqrt{t} - P_n(t)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + P_n(t)\right)\right) . \qquad \textbf{(*)} \end{aligned}$$

De l'hypothèse de récurrence, on déduit alors $\sqrt{t} + P_n(t) \leq 2\sqrt{t} \leq 2$, puis $\sqrt{t} - P_{n+1}(t) \geq 0$ (les deux facteurs de **(*)** sont positifs), ce qui achève la récurrence.

d. En reprenant l'inégalité **(*)** ci-dessus, on a facilement

$$\forall t \in [0,1] \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq \sqrt{t} - P_{n+1}(t) \leq \left(\sqrt{t} - P_n(t)\right)\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right) .$$

Par une récurrence immédiate, on déduit alors

$$\forall t \in [0,1] \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq \sqrt{t} - P_n(t) \leq \sqrt{t}\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right)^n .$$

e. Pour $u \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(u) = u\left(1 - \dfrac{u}{2}\right)^n$; alors la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle car une étude de fonction montre que

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \sim \frac{2}{e\,n} \quad \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \quad 0 .$$

Donc $\displaystyle\max_{t \in [0,1]} \left|\sqrt{t} - P_n(t)\right| \leq \frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui montre que la suite de fonctions (P_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$.

f. Pour $x \in [-1,1]$, on a $|x| = \sqrt{x^2}$, avec $x^2 \in [0,1]$. Posons $Q_n(x) = P_n(x^2)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$; alors les fonctions Q_n sont polynomiales sur $[-1,1]$ et la suite de fonctions Q_n converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction valeur absolue.

21*. Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on définit une suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_0 = f$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \qquad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t .$$

a. On supposera dans cette question que la variable `lv` contient les valeurs d'une fonction continue f en des points régulièrement espacés de l'intervalle $[0,1]$. Si la liste `lv` est de longueur p, alors pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, l'élément `lv[k]` contient donc la valeur $f\left(\dfrac{k}{p-1}\right)$.

Écrire une fonction `trapezes(lv)`, qui prend comme argument une liste de valeurs `lv`, et qui retourne la liste des valeurs en les mêmes points de la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, primitive de f s'annulant en 0. Comme son nom l'indique, le calcul des valeurs de F sera fait par la méthode des trapèzes.

b. En prenant $f(t) = t$, utiliser Python pour représenter sur $[0, 1]$ la fonction $g_{10} = \sum_{k=1}^{10} f_k$, où les f_k ont été définis en préambule. *On pourra choisir un pas de calcul de* $0,01$.

c. Représenter, sur $[0, 1]$, la fonction $g'_{10} - g_{10}$. Que peut-on conjecturer ?

d. Dans le cas général ($f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue), montrer l'existence de $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et chercher une équation différentielle vérifiée par g.