Éléments propres.

1. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}[X]$. Montrer que la seule valeur propre de l'opérateur de dérivation $D : P \mapsto P'$ est 0, préciser le sous-espace propre associé.

2. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

a. Montrer que, si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est aussi valeur propre de $v \circ u$.

b. Si E est de dimension finie, montrer que $\mathrm{Sp}(v \circ u) = \mathrm{Sp}(u \circ v)$.

c. Si E est de dimension infinie, montrer que 0 peut être valeur propre de $u \circ v$ sans être valeur propre de $v \circ u$. *On pourra, dans $E = \mathbb{K}[X]$, considérer l'opérateur de dérivation $D : P \mapsto P'$ et un "opérateur de primitivation" $\Phi : P \mapsto \int_0^X P(t)\,\mathrm{d}t$.*

3. Localisation des valeurs propres.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$. Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $\rho_i = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ et on note D_i le disque fermé de $\mathbb{C}$ de centre $a_{i,i}$ et de rayon ρ_i. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

4. Soit $E = \mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. Pour $f \in E$, on pose

$$\forall x \in [0,1] \qquad U(f)(x) = \int_0^1 \min\{x, t\}\, f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

a. Montrer que U est un endomorphisme de E et que, pour tout $f \in E$, l'application $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$.

b. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme U.

5. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. *On rappelle que, lorsque deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.*

6. Soit F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles de limite nulle, soit f l'endomorphisme de F défini par $f(u) = v$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - u_n\ .$$

Déterminer les valeurs propres de f.

7*. Soit l'espace vectoriel $E = \Big\{f \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\big) \mid f(0) = 0\Big\}$. Pour tout $f \in E$, on définit $\varphi(f) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(f)(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Montrer que φ est un endomorphisme de E, puis déterminer ses valeurs propres.

8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit H un hyperplan de E, soit φ une forme linéaire sur E telle que $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

a. Montrer que H est stable par f si et seulement s'il existe un scalaire λ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.

b. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ les matrices de f et de φ dans une base $\mathcal{B}$ de E. Montrer que H est stable par f si et seulement si $L^\top$ est un vecteur propre de $A^\top$.

c. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme f canoniquement représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Polynôme caractéristique.

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible, soit $B = A^{-1}$. Quelle relation y a-t-il entre les polynômes caractéristiques χ_A et χ_B ?

10. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice $M = \chi_A(B)$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

11. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}$, $M'' = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & \lambda I_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. En effectuant les produits matriciels MM' et $M''M$, montrer que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique: $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Diagonalisation (pratique).

12. Sans écrire aucun calcul, déterminer les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & -12 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

13. Diagonaliser $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $a_{1,1} = 0$ et $a_{i,j} = 1$ si $(i,j) \neq (1,1)$.

14. Soient a, b, c des nombres complexes non nuls. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Quel est le rang de la matrice A ? Est-elle diagonalisable ?

15. Soit $n \geq 3$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad a_{i,1} = a_{1,i} = a_{i,i} = 1 \qquad ; \qquad a_{i,j} = 0 \quad \text{sinon} .$$

a. Déterminer $\mathrm{rg}(A - I_n)$, calculer $\det(A)$ et $\mathrm{tr}(A)$.

b. Sans utiliser le polynôme caractéristique, déterminer les éléments propres de A, et montrer que A est diagonalisable.

16. Soit $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit P_n son polynôme caractéristique.

a. Calculer P_1 et P_2. Pour $n \geq 3$, exprimer P_n en fonction de P_{n-1} et P_{n-2}.

b. Soit $x \in]-2, 2[$. Montrer que

$$P_n(x) = \frac{\sin\big((n+1)\alpha\big)}{\sin(\alpha)} \;, \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \mathrm{Arccos}\left(\frac{x}{2}\right) .$$

c. En déduire que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

17. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Combien y a-t-il de matrices M telles que $M^2 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? Et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

18. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient a et b deux réels distincts. Pour $P \in E$, on pose
$$\varphi(P) = (X-a)(X-b)P' - nXP\ .$$
Montrer que φ est un endomorphisme de E, et qu'il est diagonalisable.

19. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Calculer A^2. La matrice A est-elle diagonalisable ? Préciser ses éléments propres.

Diagonalisation (théorie).

20. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes.

a. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Montrer que l'endomorphisme $f = P(u)$ est diagonalisable. A-t-il n valeurs propres distinctes?

b. Soit v un endomorphisme de E qui commute avec u. Montrer que tout vecteur propre de u est aussi vecteur propre de v. La réciproque est-elle vraie (tout vecteur propre de v est-il vecteur propre de u) ? Montrer que u et v sont codiagonalisables (i.e. diagonalisables dans une même base).

21. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant la relation $2A^3 + 3A^2 + 6A - I_n = 0$.

a. Montrer que A est inversible.

b. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

c. Montrer que $\det(A) > 0$.

22. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit u un endomorphisme de E. On suppose que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Im}(u + \mathrm{id}_E) = \{0_E\}$. Montrer que u est diagonalisable. Donner une interprétation géométrique de u.

23. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, soit $f : M \mapsto \mathrm{tr}(A)\,M - \mathrm{tr}(M)\,A$.

a. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Préciser le noyau de f.

c. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

24*. Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} 1 & & & (\times) \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & n \end{pmatrix}$, i.e. M est triangulaire supérieure avec $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ sur la diagonale. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M. On note $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a. Montrer que f est diagonalisable.

b. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} E_i(f)$.

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = M$. Montrer que A est triangulaire supérieure.

25. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

a. Montrer l'implication

$$\mathrm{rg}(u) \leq 1 \implies \forall a \in \mathbb{K} \quad \det(\mathrm{id}_E + a\, u) = 1 + a\,\mathrm{tr}(u)\ .$$

b. La réciproque est-elle vraie ? Est-elle vraie si l'on suppose de plus u diagonalisable ?

26. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

a. Démontrer la relation $A^2 = \mathrm{tr}(A) \cdot A$.

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

c. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$.

27.a. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A et B sont diagonalisables.

b. Diagonaliser la matrice $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -2A & 3A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

28. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^5 = M^2$, et $\mathrm{tr}(M) = n$. Montrer que $M = I_n$.

29*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **commutant** de A l'ensemble des matrices qui commutent avec A, soit

$$\mathcal{C}(A) = \big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\big\}\ .$$

a. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b. On suppose A diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ avec les multiplicités $m_1, \cdots, m_k$. Montrer qu'une matrice M commute avec A si et seulement si l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M laisse stables les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(A)$, $1 \leq i \leq k$. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(A)$.

c. On suppose dans cette question que A admet n valeurs propres distinctes. Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1})$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(A)$.

30. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim(E) = n$. On suppose qu'il existe n hyperplans $H_1, \cdots, H_n$ de E, stables par u et tels que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} H_i = \{0\}$. Montrer que u est diagonalisable.

On pourra s'intéresser aux sous-espaces $D_i = \displaystyle\bigcap_{j \neq i} H_j$, *avec* $1 \leq i \leq n$.

31*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = -I_n$. Montrer que l'entier n est nécessairement pair ($n = 2p$), et que A est semblable à la matrice diagonale par blocs $M = \mathrm{diag}(C, C, \cdots, C)$, en posant $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

32. Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $n \geq 2$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\varphi(P)(X) = (X-a)\left(P'(X) - P'(a)\right) - 2\left(P(X) - P(a)\right) .$$

a. Montrer que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Déterminer ses valeurs propres. Est-il diagonalisable ? *On pourra utiliser le fait que la famille* $\mathcal{B} = \left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

33. Soient A, B, M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec A et B diagonalisables. On suppose qu'il existe p et q entiers naturels tels que $A^p M B^q = 0$. Montrer que $AMB = 0$.

34. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

a. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \qquad P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)\,B \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix} .$$

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit diagonalisable.

35. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$. Montrer que $\det(A) = 1$.

36*. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer l'équivalence

$$f \text{ est diagonalisable} \iff f^2 \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f) .$$

37*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}\left((A - \lambda I_n)^2\right) .$$

Trigonalisation.

38. Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

39. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Pour quels réels a la matrice A est-elle non-diagonalisable ?

b. Pour chacun des réels a obtenus ci-dessus, trouver une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

40.a. Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

b. On définit trois suites réelles (x_n), (y_n), (z_n) par l'initialisation $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ et la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n + 2z_n \end{cases} .$$

Exprimer x_n, y_n, z_n en fonction de n.

41*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $z \in \mathbb{C}$ non valeur propre de A. Prouver la relation

$$\operatorname{tr}\big((zI_n - A)^{-1}\big) = \frac{\chi_A'(z)}{\chi_A(z)} \ .$$

42*. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.

a. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

b. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

43*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence

$$A \text{ est nilpotente} \iff \forall k \in [\![1, n]\!] \quad \operatorname{tr}(A^k) = 0 \ .$$

Théorème de Cayley-Hamilton.

44*. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe une droite ou un plan de E stable par f. Est-ce encore vrai en dimension infinie ?

45. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer que l'endomorphisme T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad T(M) = AM - MA$ est nilpotent.

46. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

a. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

b. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

c. Soit $B = A + \lambda I_3$ avec λ réel non nul. Montrer que B est inversible et que l'on peut écrire $B^{-1} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$, où α, β, γ sont des réels (dépendant de λ).

Exercices avec Python.

47. Soit la matrice $A_{n,a} = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & 1/a & \ddots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1/a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Écrire une fonction `matrice(n,a)` qui renvoie la matrice $A_{n,a}$.

b. Donner des valeurs approchées des valeurs propres de $A_{n,a}$ pour $n \in [\![3, 8]\!]$ et $a \in \{-2, -1, 1, 2, 3\}$.

c. Soit $(P_n)_{n \geq 1}$ la suite de polynômes donnée par

$$P_1 = X \qquad P_2 = X^2 - 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{n+2} = X\, P_{n+1} - P_n \ .$$

(i). Calculer les coefficients de P_3, $\cdots$, P_8.

(ii). Donner des valeurs approchées des racines de P_3, $\cdots$, P_8.

(iii). Conjecturer un lien entre P_n et $A_{n,a}$ puis le démontrer.

d. Les matrices $A_{n,a}$ sont-elles inversibles ? Sont-elles diagonalisables ?

e. Trouver un segment de $\mathbb{R}$ contenant toutes les valeurs propres des matrices $A_{n,a}$.