CONTRÔLE de MATHÉMATIQUES numéro 1

PSI2 2024-2025 **Durée : 30 minutes environ** **04/11/2024**

ÉNONCÉ: Discuter en fonction du paramètre réel α la nature des intégrales suivantes:

$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad ; \qquad J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad ; \qquad K_\alpha = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t\ .$$

UN CORRIGÉ

Notons d'abord que les fonctions considérées sont toutes à valeurs positives sur les intervalles proposés. La convergence de l'intégrale généralisée équivaut donc à sa convergence absolue, et donc à l'intégrabilité de la fonction (l'intégrande) sur l'intervalle.

a. La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{x^\alpha}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ et on peut écrire $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}$ d'où l'on déduit (en manipulant les équivalents avec précaution) que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,x^\alpha\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}}$. Par le critère des équivalents, on conclut que f est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha + \dfrac{1}{2} > 1$.

Bilan: l'intégrale I_α est convergente <u>si et seulement si</u> $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

b. La fonction $g\ :\ t \mapsto \dfrac{1-e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$. Deux études locales s'avèrent nécessaires:

- en la borne 0, on a $g(t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{t}{t^\alpha} = t^{1-\alpha} = \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$, d'où l'intégrabilité en 0 si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ d'après le cours, i.e. $\alpha < 2$.
- en la borne $+\infty$, $g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ donc g est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Bilan: l'intégrale J_α est convergente <u>si et seulement si</u> $1 < \alpha < 2$.

c. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{(\ln t)^2}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,1]$. Une étude locale en 0 est nécessaire.

Si l'on se souvient des résultats de croissances comparées au voisinage de zéro, on peut conjecturer que le facteur $(\ln t)^2$ ne va pas influencer beaucoup le comportement de l'intégrale. Il est alors raisonnable d'envisager la disjonction de cas suivante:

$\triangleright$ si $\alpha \geq 1$, comme $\lim\limits_{t\to0^+} (\ln t)^2 = +\infty$, on aura $h(t) \geq \dfrac{1}{t^\alpha}$ au voisinage de 0 et, comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ n'est pas intégrable en 0 dans ce cas, a fortiori h n'est pas intégrable en 0.

$\triangleright$ si $\alpha < 1$, il faut être un peu plus subtil et manipuler avec dextérité les croissances comparées. En introduisant un réel β tel que $\alpha < \beta < 1$, alors je prétends que h est négligeable devant $t \mapsto \dfrac{1}{t^\beta}$ au voisinage de 0... et je le prouve en écrivant que

$$t^\beta\,h(t) = t^{\beta-\alpha}\,(\ln t)^2 \quad \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} \quad 0$$

puisque l'exposant $\beta - \alpha$ est strictement positif. Comme $\beta < 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\beta}$ est intégrable en 0, et par comparaison on en déduit l'intégrabilité de h en 0.

Bilan: l'intégrale K_α est convergente <u>si et seulement si</u> $\alpha < 1$.

COMMENTAIRES

Il y a de nombreuses erreurs de méthode à signaler:

1. Comme on recherche une condition **nécessaire et suffisante** sur α pour qu'une intégrale converge, il est pertinent d'utiliser le plus possible des équivalents. On sait en effet que, si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors f est intégrable en a **si et seulement si** g est intégrable en a. *Remarque: si on exprime cela en termes de fonctions intégrables et non d'intégrales convergentes, il est inutile de mentionner que les fonctions sont positives.*

Une majoration, en revanche, ne pourra jamais donner qu'une condition **suffisante** pour qu'une intégrale converge, et certainement pas une CNS! En effet, supposons que l'on ait $0 \leq f \leq g$ sur un intervalle I ; alors l'intégrabilité de g sur I entraîne celle de f, mais... si g n'est pas intégrable, cela ne fournit aucun renseignement sur l'intégrabilité de f. Il est donc impossible d'obtenir une **CNS** sur le paramètre α à partir d'une majoration. Idem pour l'utilisation des relations de comparaison locales o et O.

Je rappelle aussi que la condition $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f(t) = 0$ **n'est pas une CNS** pour que f soit intégrable en $+\infty$, c'est seulement une condition **suffisante**.

2. Dans l'exo 1, il ne fallait pas scinder l'intégrale en deux: $I_\alpha = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{x^\alpha}\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^\alpha}\mathrm{d}x$. En effet, même si ces deux intégrales sont divergentes, il est possible que l'intégrale I_α converge, c'est le cas si $\dfrac{1}{2} < \alpha \leq \dfrac{3}{2}$. Dans le cadre des séries aussi, (divergente)+(divergente) peut être convergente!

3. Éviter de se lancer dans des discussions a priori du style: "Premier cas: si $\alpha > 0$, deuxième cas: si $\alpha = 0$, troisième cas: si $\alpha < 0$". Il n'y a pas toujours de raison pour qu'une telle disjonction de cas soit pertinente. Une analyse préalable de la situation est indispensable avant de se lancer dans une éventuelle discussion!

Une disjonction de cas peut toutefois s'avérer pertinente après un peu de réflexion, et c'était le cas pour l'intégrale K_α où deux raisonnements différents permettent de conclure suivant que $\alpha \geq 1$ ou $\alpha < 1$, *cf.* corrigé au verso.

4. Certains passent beaucoup de temps à chercher d'éventuels prolongements par continuité, ce qui ne sert pas à grand-chose dans ce genre de discussion, c'est un peu du hors sujet.

BILAN

Le bilan de ce contrôle est moyen: une moyenne de 8,55, une médiane de 9, des notes allant de 0 à 18,5. Si cela peut vous redonner du courage, sachez que les PSI 2 de l'année dernière avaient eu une moyenne de 6,26 à un contrôle analogue.