DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 3

PSI2 2024-2025 **pour le 18/11/2024**

Définitions et notations

• Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est dite **à diagonale strictement dominante** si elle vérifie la condition

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \qquad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \ .$$

• Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite **stochastique** si elle vérifie les deux conditions suivantes :

(i) $$\forall (i,j) \in [\![1, p]\!]^2 \qquad a_{i,j} \geq 0 \ ;$$

(ii) $$\forall i \in [\![1, p]\!] \qquad \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = 1 \ .$$

Elle est dite **strictement stochastique** si elle est stochastique et si, de plus, ses coefficients sont tous strictement positifs.

On notera $\mathcal{S}_p$ l'ensemble des matrices stochastiques d'ordre p, et $\mathcal{S}_p^*$ celui des matrices strictement stochastiques.

• Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est une matrice carrée, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $a_{i,j}^{(n)}$ le coefficient d'indices (i,j) de la matrice A^n : on a ainsi par exemple $a_{i,j}^{(0)} = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker), $a_{i,j}^{(1)} = a_{i,j}$.

Si, pour tout couple $(i,j) \in [\![1, p]\!]^2$, la suite $(a_{i,j}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $b_{i,j}$, on dit alors que la suite de matrices $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers la matrice $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, de coefficients $b_{i,j}$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n = B$.

• On notera enfin U la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

PARTIE A

A.1. **a.** Montrer que la condition **(ii)** ci-dessus équivaut à la condition $AU = U$.

b. En déduire que les ensembles $\mathcal{S}_p$ et $\mathcal{S}_p^*$ sont stables par produit.

A.2. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

a. Montrer que le nombre 1 est valeur propre de A.

b. Montrer que, pour tout n entier naturel, la matrice A^n est stochastique.

c. On suppose que la suite de matrices (A^n) converge vers une matrice B. Montrer que la matrice B est stochastique et que, pour tout entier naturel n, on a $A^n B = B A^n = B$. Montrer que B est une matrice de projecteur.

A.3. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale strictement dominante. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^p$ un vecteur-colonne non nul, soit $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $|x_k| = \max\limits_{1 \leq i \leq p} |x_i|$, soit $Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$, montrer que $y_k \neq 0$. En déduire que la matrice A est inversible.

A.4. Soit A une matrice stochastique. Montrer que ses valeurs propres complexes sont toutes de module inférieur ou égal à 1.

PARTIE B

Dans cette partie, on appelle A une matrice carrée d'ordre p, strictement stochastique.

B.1. On pose $M = A - I_p$. On note N la matrice carrée d'ordre $p-1$ obtenue à partir de la matrice M en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne. Montrer que N est à diagonale strictement dominante.

B.2. En déduire le sous-espace propre de A pour la valeur propre 1.

B.3. Montrer que les valeurs propres de A autres que 1 ont un module strictement inférieur à 1.

PARTIE C : Étude des matrices stochastiques d'ordre deux

La forme générale d'une matrice stochastique d'ordre deux est $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$, avec $(a,b) \in [0,1]^2$.

On suppose que le couple (a,b) est différent de $(0,0)$ et de $(1,1)$.

a. Calculer $P(A)$, où P est le polynôme $P = (X-1)\big(X-(a+b-1)\big)$.

b. Exprimer le reste de la division euclidienne de X^n par P, pour $n \in \mathbb{N}$.

c. En déduire l'expression de A^n en fonction de a, b et n ($n \in \mathbb{N}$).

d. Montrer que la suite (A^n) converge et préciser sa limite.

PARTIE D

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique, avec $p \geq 3$. Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$ et tout entier naturel non nul n, on pose

$$\alpha_j^{(n)} = \min_{1\leq i\leq p} a_{i,j}^{(n)} \qquad ; \qquad \beta_j^{(n)} = \max_{1\leq i\leq p} a_{i,j}^{(n)} \qquad ; \qquad \gamma_j^{(n)} = \beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)} .$$

On pose par ailleurs $\varepsilon = \min_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} a_{i,j}$.

D.1. Montrer que $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

D.2. Exprimer $a_{i,j}^{(n+1)}$ en fonction de $a_{i,1}$, $a_{i,2}$, $\cdots$, $a_{i,p}$ et des coefficients de A^n.

D.3. Montrer que, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ et tout entier naturel non nul n, on a

$$a_{i,j}^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)} \geq \varepsilon\, \gamma_j^{(n)} \qquad \text{et} \qquad \beta_j^{(n)} - a_{i,j}^{(n+1)} \geq \varepsilon\, \gamma_j^{(n)} .$$

D.4. En déduire que, pour tout entier $j \in [\![1,p]\!]$ et tout entier naturel non nul n, on a

$$\alpha_j^{(n)} \leq \alpha_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n)} \qquad \text{et} \qquad \gamma_j^{(n+1)} \leq (1-2\varepsilon)\, \gamma_j^{(n)} .$$

D.5. En déduire que la suite (A^n) converge, on notera B sa limite.

D.6. Montrer que les lignes de la matrice B sont toutes égales.

D.7. Soit $L \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ l'un quelconque des vecteurs-lignes de la matrice B. Montrer que le vecteur $X = L^\top \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est vecteur propre de la matrice $A^\top$ pour la valeur propre 1.

D.8. Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. En utilisant les questions **D.6.** et **D.7.**, déterminer la matrice $B = \lim_{n\to+\infty} A^n$.