Calculs de déterminants.

1. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel E. Soit le vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les λ_i pour que la famille $(e_1 + x, \cdots, e_n + x)$ soit libre.

- -

La famille de vecteurs $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ constitue une base du sous-espace $F = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$ qui est de dimension n. Comme $x \in F$, la famille $\mathcal{X} = (e_1 + x, \cdots, e_n + x)$ est constituée de vecteurs de F, et $\mathcal{X}$ est libre si et seulement si c'est une base de F, c'est-à-dire si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) \neq 0$. Calculons donc ce déterminant : on effectuera d'abord l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + (L_2 + \cdots + L_n)$, on "sortira" le facteur $1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ de la première ligne, puis on effectuera les opérations $C_j \leftarrow C_j - C_1$ $(2 \leq j \leq n)$. On est alors ramené au déterminant d'une matrice triangulaire inférieure.

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) &= \begin{vmatrix} 1+\lambda_1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 1+\lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n & \lambda_n & \cdots & 1+\lambda_n \end{vmatrix} = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & 1+\lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n & \lambda_n & \cdots & 1+\lambda_n \end{vmatrix} \\
&= \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ \lambda_n & (0) & & 1 \end{vmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que la famille $\mathcal{X}$ est libre si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq -1$.

---

2. Par récurrence, calculer $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{(n)}$ et $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & 1 \end{vmatrix}_{(n)}$.

- -

a. Les opérations élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$, puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_n$, conduisent à

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{(n)},$$

ensuite un développement par rapport à la première ligne, puis par rapport à la première colonne, donnent $D_n = (-1)^{n+1}\,(-1)\,(-1)^{(n-1)+1}\,D_{n-2} = D_{n-2}$. Avec $D_1 = 0$ et $D_2 = 1$, on conclut $D_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$.

b. Un développement par rapport à la deuxième ligne donne $\Delta_n = -1 + \Delta_{n-1}$. De $\Delta_1 = 1$, on tire $\Delta_n = 2 - n$.

---

3. Soient a_1, a_2, …, a_n, b, c des réels avec $b \neq c$. Montrer que le déterminant

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_1+x & c+x & \dots & c+x \\ b+x & a_2+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ b+x & \dots & b+x & a_n+x \end{vmatrix}_{(n)}$$

est une fonction affine du réel x. En déduire la valeur de $D(0)$.

- -

Transformons $D(x)$ en effectuant les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_1$ $(2 \leq i \leq n)$. On obtient alors $D(x) = \begin{vmatrix} a_1+x & c+x & \dots & c+x \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$, où les $\alpha_{i,j}$ $(2 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n)$ sont des scalaires (indépendants de la variable x). En développant ce déterminant par rapport à la première ligne, on obtient alors

$$D(x) = (a_1+x)\,\gamma_{1,1} + (c+x)\sum_{j=2}^{n}\gamma_{1,j}\ ,$$

où les cofacteurs $\gamma_{1,j}$ $(1 \leq j \leq n)$ sont indépendants de x. On voit alors que $D(x)$ peut se mettre sous la forme $Ax+B$, où A et B sont des constantes, c'est donc une fonction affine de la variable x.

Remarquons que, pour les valeurs $x = -b$ et $x = -c$, les matrices obtenues sont triangulaires, d'où le système

$$\begin{cases} D(-b) \;=\; -b\ \ A\ +B \;=\; \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a_i - b) \\ D(-c) \;=\; -c\ \ A\ +B \;=\; \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a_i - c) \end{cases},$$

qui conduit à

$$D(0) = B = \frac{1}{b-c}\left[b\cdot\prod_{i=1}^{n}(a_i-c) - c\cdot\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)\right]\ .$$

---

4. Soit la matrice $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, avec $a_{i,j} = \begin{pmatrix} i+j \\ i \end{pmatrix}$. Calculer $\det(A)$.

- -

$$\text{On a } \det(A) = D_{n+1} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n+1}{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n+1}{n} & \cdots & \binom{2n}{n} \end{vmatrix}_{(n+1)} .$$

En vertu de la formule de Pascal $\binom{i+j}{i} - \binom{i+j-1}{i} = \binom{i+j-1}{i-1}$, si l'on effectue les opérations $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$, pour j allant de n à 1 en décroissant, on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{1} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n-1} & \cdots & \binom{2n-1}{n-1} \end{vmatrix}_{(n+1)} .$$

On développe alors par rapport à la première ligne, puis on effectue les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ pour i allant de n à 1 en décroissant. De nouveau avec la formule de Pascal, on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}_{(n)} .$$

Comme les coefficients de la première ligne valent tous 1, on a finalement $D_{n+1} = D_n$. Avec $D_1 = 1$, on conclut que $D_n = 1$ pour tout n.

---

5. Calculer le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & (0) \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ (0) & & & 1 & a+b \end{vmatrix}_{(n)} .$$

- -

Sans trop détailler les calculs, un développement par rapport à la première ligne, puis par rapport à la première colonne, donnent la relation de récurrence linéaire d'ordre deux

$$D_n = (a+b)\, D_{n-1} - ab\, D_{n-2} .$$

L'équation caractéristique se factorise en $(r-a)(r-b)=0$, donc si $a \neq b$, on obtiendra une expression de la forme $D_n = \lambda a^n + \mu\, b^n$, où λ et μ restent à déterminer en considérant D_1 et D_2. On trouve $\lambda = -\dfrac{a}{b-a}$ et $\mu = \dfrac{b}{b-a}$, donc

$$D_n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} = b^n + b^{n-1}a + \cdots + ba^{n-1} + a^n .$$

Le déterminant étant multilinéaire en dimension finie, il est continu par rapport aux variables (les n vecteurs-colonnes de la matrice), on en déduit que, pour n donné, l'application $(a,b) \mapsto D_n(a,b)$ est continue sur $\mathbb{K}^2$. L'expression obtenue ci-dessus, valable pour $a \neq b$, donne, pour tout réel a,

$$D_n(a,a) = \begin{vmatrix} 2a & a^2 & & & (0) \\ 1 & 2a & a^2 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a^2 \\ (0) & & & 1 & 2a \end{vmatrix}_{(n)} = \lim_{b \to a} D_n(a,b) = (n+1)a^n .$$

---

6. Soient $a_1, \cdots, a_n$ des nombres complexes. Soit $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $b_{i,j} = a_{\max\{i,j\}}$. Calculer $\det(B)$. En déduire $\Delta_n = \det\big((\max\{i,j\})_{1 \le i,j \le n}\big)$ et $\delta_n = \det\big((\min\{i,j\})_{1 \le i,j \le n}\big)$.

- -

On a $\det(B) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & & a_n \\ & & & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$. Les opérations $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$, effectuées pour j

de n à 2 dans le sens décroissant, conduisent à $\det(B) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2-a_1 & \cdots & a_{n-1}-a_{n-2} & a_n-a_{n-1} \\ a_2 & 0 & \ddots & & a_n-a_{n-1} \\ a_3 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & a_n-a_{n-1} \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Un développement par rapport à la dernière ligne donne enfin

$$\det(B) = (-1)^{n+1} a_n (a_2-a_1)(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1}) = a_n \prod_{k=2}^{n} (a_{k-1}-a_k) .$$

Avec $a_i = i$ $(1 \leq i \leq n)$, on obtient $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & & n \\ 2 & 2 & 3 & & n \\ 3 & 3 & 3 & & n \\ & & & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\, n$.

Enfin, $\delta_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & 2 & 3 & & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & & 1 \\ & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ en effectuant une permutation-miroir sur les lignes et aussi les colonnes (ce qui revient à chaque fois à faire $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ échanges de lignes ou colonnes, donc au final ne modifie pas le déterminant), on se retrouve dans une situation analogue avec $a_i = n+1-i$ $(1 \leq i \leq n)$, donc $\delta_n = 1$.

---

7. Soient $X = (x_1, \cdots, x_n)$ et $Y = (y_1, \cdots, y_n)$ dans $\mathbb{K}^n$ identifiés à des matrices-colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(I_n + X\,Y^\top) = 1 + X^\top Y$.

- -

Soit la matrice $M = XY^\top = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \cdots & x_ny_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix}$. Cette matrice M est de rang 1 au plus (les vecteurs-colonnes sont tous proportionnels), donc M est semblable à une matrice R de la forme $R = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$, i.e. une matrice dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles. En effet, l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M est de rang 1 au plus, donc $\dim(\operatorname{Ker} u) \geq n-1$, il suffit de se placer dans une base de $\mathbb{K}^n$ adaptée à $\operatorname{Ker} u$ pour que u soit représenté par une matrice de la forme R. Posons donc $M = XY^\top = PRP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $A = I_n + M = I_n + PRP^{-1} = P(I_n+R)P^{-1}$, donc

$$\det(A) = \det(I_n+R) = \begin{vmatrix} 1 & & (0) & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & a_{n-1} \\ (0) & & & 1+a_n \end{vmatrix} = 1 + a_n .$$

Mais $a_n = \mathrm{tr}(R) = \mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\top Y$. Finalement, $\det(I_n + XY^\top) = 1 + X^\top Y$.

8*. Déterminant de Hurwitz

Soient a, x_1, $\cdots$, x_n des nombres complexes. Calculer $D = \begin{vmatrix} a+x_1 & & (a) \\ & \ddots & \\ (a) & & a+x_n \end{vmatrix}$.

- -

Notons $\mathcal{B}_0 = (E_1, \cdots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n$. Soit le vecteur-colonne $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} E_j$. Si l'on note C_j le j-ème vecteur-colonne de la matrice dont on veut calculer le déterminant, on a $C_j = aU + x_j E_j$. Ainsi,

$$D = \det_{\mathcal{B}_0}(C_1, \cdots, C_n) = \det_{\mathcal{B}_0}\left(aU + x_1 E_1, aU + x_2 E_2, \cdots, aU + x_n E_n\right) .$$

Le déterminant d'une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n rapporté à une base est n-linéaire, i.e. est linéaire par rapport à chacun des vecteurs. Un développement par multilinéarité donne alors, en tenant compte du fait que le déterminant d'une famille dans lequel deux vecteurs sont égaux est nul,

$$\begin{aligned} D &= \det_{\mathcal{B}_0}(x_1 E_1, \cdots, x_n E_n) + \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}_0}(x_1 E_1, \cdots, x_{j-1} E_{j-1}, aU, x_{j+1} E_{j+1}, \cdots, x_n E_n) \\ &= \Big(\prod_{j=1}^{n} x_j\Big) \det_{\mathcal{B}_0}(E_1, \cdots, E_n) + \sum_{j=1}^{n} a\Big(\prod_{k\neq j} x_k\Big) \Delta_j \end{aligned}$$

Enfin, $\det_{\mathcal{B}_0}(E_1, \cdots, E_n) = \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0) = 1$ et , pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\Delta_j = \det_{\mathcal{B}_0}(E_1, \cdots, E_{j-1}, U, E_{j+1}, \cdots, E_n) = \det_{\mathcal{B}_0}(E_1, \cdots, E_{j-1}, E_j, E_{j+1}, \cdots, E_n) = 1$$

(on retranche au vecteur U la somme $\sum_{k\neq j} E_k$, ce qui revient à faire l'opération élémentaire sur les colonnes $C_j \leftarrow C_j - \sum_{k\neq j} C_k$ qui ne modifie pas le déterminant). Finalement,

$$D = \prod_{j=1}^{n} x_j + a \sum_{j=1}^{n} \Big(\prod_{k\neq j} x_k\Big) .$$

Exercices théoriques.

9. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices réelles. On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$:

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \qquad PA = BP .$$

En décomposant P en $P = Q + iR$, où Q et R sont des matrices réelles, et en considérant l'application $f : \lambda \mapsto \det(Q + \lambda R)$, montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

- -

En prenant parties réelle et imaginaire de la relation $PA = BP$ (qui est équivalente à $A = P^{-1}BP$), on obtient respectivement **(1):** $QA = BQ$ et **(2):** $RA = BR$. La combinaison linéaire $(\mathbf{1}) + \lambda \times (\mathbf{2})$ donne alors $(Q + \lambda R)A = B(Q + \lambda R)$ pour tout réel λ.

Si $z \in \mathbb{C}$, la matrice $Q + zR$ a des coefficients $q_{i,j} + z\,r_{i,j}$ qui sont des fonctions polynomiales (en fait, affines, i.e. polynomiales de degré au plus 1) de la variable z. On sait qu'alors l'application $z \mapsto \det(Q + zR)$ est aussi polynomiale, i.e.

$$\exists F \in \mathbb{C}[X] \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad \det(Q + zR) = F(z)\ .$$

Ce polynôme F n'est pas le polynôme nul puisque, la matrice $P = Q + iR$ étant supposée inversible, on a $F(i) = \det(P) \neq 0$. Le polynôme F a donc un nombre fini de racines, il existe donc au moins un réel λ (et même une infinité de tels λ) pour lequel $F(\lambda) \neq 0$, i.e. la matrice réelle $S = Q + \lambda R$ est inversible. La relation $SA = BS$, écrite plus haut, peut alors s'écrire sous la forme $A = S^{-1}BS$, avec $S = Q + \lambda R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et cela prouve que les matrices A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

---

10. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

a. Calculer $AA^\top$. En déduire $\det(A)$.

b*. Soient n et p deux entiers naturels. On suppose que n et p peuvent chacun s'écrire comme une somme de quatre carrés d'entiers naturels. Montrer que l'entier np est aussi somme de quatre carrés d'entiers naturels.

- -

a. On calcule $AA^\top = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\, I_4$. On a donc

$$\det(AA^\top) = \det(A)\ \det(A^\top) = (\det A)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4\ .$$

Donc $\det(A) = \pm(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$. Par ailleurs, les réels b, c, d étant fixés, on voit que

$$\det(A) = \det(aI_4 - M) = \chi_M(a)\ , \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -b & -c & -d \\ b & 0 & d & -c \\ c & -d & 0 & b \\ d & c & -b & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Le cours sur le polynôme caractéristique indique alors que $a \mapsto \det(A)$ est une fonction polynomiale de degré 4, unitaire, donc $\det(A) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

b. Supposons $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ et $p = e^2 + f^2 + g^2 + h^2$ avec a, b, c, d, e, f, g, h entiers naturels. On a alors $n^2 = \det(A)$ et $p^2 = \det(B)$, avec

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} e & f & g & h \\ -f & e & -h & g \\ -g & h & e & -f \\ -h & -g & f & e \end{pmatrix}\ .$$

Le lecteur courageux vérifiera que $AB = C$, avec $C = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix}$, en posant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & ae - bf - cg - dh \\ y & = & af + be + ch - dg \\ z & = & ag - bh + ce + df \\ t & = & ah + bg - cf + de \end{array} \right. .$$

Donc $(np)^2 = n^2p^2 = \det(A) \cdot \det(B) = \det(AB) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2$ et, en considérant les signes, on voit que $np = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. Les nombres x, y, z, t étant des entiers relatifs, on conclut que np est la somme des carrés des quatre entiers naturels $|x|$, $|y|$, $|z|$, $|t|$.

11.a. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \det(C + M) = \det(M) .$$

Montrer que $C = 0$. *En supposant $C \neq 0$, en s'aidant des colonnes de C, on pourra construire une matrice M inversible telle que $C + M$ ne soit pas inversible.*

b. Que dire de deux matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \det(A + M) = \det(B + M) \ ?$$

- -

a. Par contraposition, supposons $C \neq 0$, alors au moins une de ses colonnes C_j n'est pas nulle, donc le vecteur $(-C_j)$ forme, à lui tout seul, une famille libre dans $\mathbb{R}^n$, que l'on peut compléter en une base $(X_1, \cdots, X_{j-1}, -C_j, X_{j+1}, \cdots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Soit alors $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont X_1, $\cdots$, X_{j-1}, $-C_j$, X_{j+1}, $\cdots$, X_n. On a alors $\det(M) \neq 0$ (les colonnes de la matrice M sont linéairement indépendantes) alors que $\det(C + M) = 0$ (la j-ième colonne de cette matrice est nulle).

b. Posons $N = B + M$, alors $A + M = (A - B) + N$, on a donc par hypothèse

$$\forall N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \det\big((A - B) + N\big) = \det(N) .$$

En effet, lorsque M décrit l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $N = B + M$ décrit aussi l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De la question **a.**, on déduit $A - B = 0$ donc $A = B$.

Déterminants de Vandermonde ou assimilés.

12. Soient a_0, a_1, $\ldots$, a_n des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer que la famille de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ où, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P_i(X) = (X + a_i)^n$, est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. *On pourra utiliser un déterminant de Vandermonde.*

- -

La famille $\mathcal{P} = (P_0, \cdots, P_n)$ est de cardinal $n + 1$ dans l'espace $\mathbb{K}_n[X]$ de dimension $n + 1$. Soit $\mathcal{X} = (X^n, X^{n-1}, \cdots, X, 1)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ (dans un ordre inversé pour que ça soit plus joli), on va montrer que le déterminant de la famille de vecteurs $\mathcal{P}$ relativement à la base $\mathcal{X}$ est non nul. Pour cela, développons les polynômes P_j par la formule du binôme de Newton :

$$P_j = (X+a_j)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_j^{n-i} X^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i} a_j^{n-i} X^i \ .$$

On voit ainsi que

$$\det_{\mathcal{X}}(\mathcal{P}) = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} a_0 & \binom{n}{1} a_1 & \cdots & \binom{n}{1} a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{n} a_0^n & \binom{n}{n} a_1^n & \cdots & \binom{n}{n} a_n^n \end{vmatrix}_{(n+1)} = \left[\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right] V_{n+1}(a_0, a_1, \cdots, a_n) \ ,$$

où $V_{n+1}(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$ est le déterminant de Vandermonde des $n+1$ nombres $a_0, \cdots, a_n$. Ces $n+1$ nombres étant deux à deux distincts, les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ étant par ailleurs non nuls, on a $\det_{\mathcal{X}}(\mathcal{P}) \neq 0$, et la famille $\mathcal{P}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

13*. Pour x réel et k entier naturel, on pose $(x)_k = \prod_{i=0}^{k-1} (x-i)$. Ainsi $(x)_0 = 1$ et, si k est non nul, $(x)_k = x(x-1)\cdots(x-k+1)$. Soient $x_1, \cdots, x_n$ des nombres réels, montrer que

$$\det\Big(\big((x_j)_{i-1}\big)_{1\le i,j\le n}\Big) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_1)_{n-1} & (x_2)_{n-1} & \cdots & (x_n)_{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i) = V_n(x_1, \cdots, x_n) \ ,$$

où V_n représente le déterminant de Vandermonde d'ordre n.

- -

Notons $D_n(x_1, \cdots, x_n)$ le déterminant d'ordre n à calculer. On peut procéder par récurrence comme pour le déterminant de Vandermonde.

Pour $n = 2$, on a $D_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = V_2(x_1, x_2)$.

Soit $n \ge 2$, supposons vraie l'égalité $D_n(x_1, \cdots, x_n) = V_n(x_1, \cdots, x_n)$ pour tout n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ de réels. Posons alors

$$f(x) = D_{n+1}(x_1, \cdots, x_n, x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ (x_1)_{n-1} & (x_2)_{n-1} & \cdots & (x_n)_{n-1} & (x)_{n-1} \\ (x_1)_n & (x_2)_n & \cdots & (x_n)_n & (x)_n \end{vmatrix} .$$

- si les x_j $(1 \leq j \leq n)$ ne sont pas tous distincts, alors $f(x) = 0 = V_{n+1}(x_1, \cdots, x_n, x)$ car le déterminant considéré comporte deux colonnes identiques.

- si $x_1, \cdots, x_n$ sont distincts, comme $x \mapsto (x)_k$ est, pour tout k, une application polynomiale de degré k unitaire, un développement par rapport à la dernière colonne montre que f est une application polynomiale de degré au plus n, et même de degré n exactement puisque le coefficient de x^n est le cofacteur d'indices $(n+1, n+1)$, qui n'est autre que le déterminant $D_n(x_1, \cdots, x_n) = V_n(x_1, \cdots, x_n)$, non nul, par l'hypothèse de récurrence. Ce polynôme de degré n admet par ailleurs pour racines les n nombres distincts $x_1, \cdots, x_n$ (si $x = x_i$ avec $1 \leq i \leq n$, on a encore deux colonnes identiques), donc $f(x) = V_n(x_1, \cdots, x_n) \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$, soit $f(x) = D_{n+1}(x_1, \cdots, x_n, x) = V_{n+1}(x_1, \cdots, x_n, x)$, ce qu'il fallait démontrer.

Déterminants de matrices par blocs.

14. Soient A, B, C, D des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $CD = DC$ et que D est inversible. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Montrer que $\det M = \det(AD - BC)$.

- -

On a la relation

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$$

(*bon, c'est sûr, fallait y penser!!*). En prenant les déterminants (puisque le déterminant du produit de deux matrices est égal au produit des déterminants), on obtient

$$\det(M) \times \det(D) \times \det(D^{-1}) = \det(AD - BC) \ , \qquad \text{soit} \quad \det(M) = \det(AD - BC) \ .$$

---

15. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soient $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, $N = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

a. Montrer que $\det(M) = \det(A + B)\ \det(A - B)$.

b. Montrer que $\det(N) \geq 0$.

- -

a. Les opérations de transvection $L_i \leftarrow L_i - L_{n+i}$, $1 \leq i \leq n$, transforment M en $M' = \begin{pmatrix} A - B & B - A \\ B & A \end{pmatrix}$. Ensuite, les transvections sur les colonnes $C_j \leftarrow C_j + C_{j-n}$, $n + 1 \leq j \leq 2n$, transforment M' en $M'' = \begin{pmatrix} A - B & 0_n \\ B & A + B \end{pmatrix}$. Comme M'' est triangulaire inférieure par blocs, on a

$$\det(M) = \det(M') = \det(M'') = \det(A + B)\ \det(A - B) \ .$$

b. Les opérations de transvection $C_p \leftarrow C_p + i\ C_{n+p}$, $1 \leq p \leq n$, transforment N en $N' = \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ B + iA & A \end{pmatrix}$. Ensuite, les transvections $L_q \leftarrow L_q - i\ L_{q-n}$, $n + 1 \leq q \leq 2n$, transforment N' en $N'' = \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ 0_n & A + iB \end{pmatrix}$. Comme N'' est triangulaire supérieure par blocs, on a

$$\det(N) = \det(N') = \det(N'') = \det(A + iB)\ \det(A - iB)\ .$$

Mais, les matrices A et B étant réelles, les matrices $A + iB$ et $A - iB$ sont conjuguées l'une de l'autre (coefficients conjugués), donc leurs déterminants sont conjugués aussi (*se montre par exemple par récurrence sur la taille de la matrice en utilisant un développement par rapport à une ligne ou une colonne*), finalement $\det(N) = \big|\det(A + iB)\big|^2 \geq 0$.