SUITES NUMÉRIQUES

SUITES 1. Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \geq -1$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$. Déterminer son sens de variation, étudier sa convergence.

- -

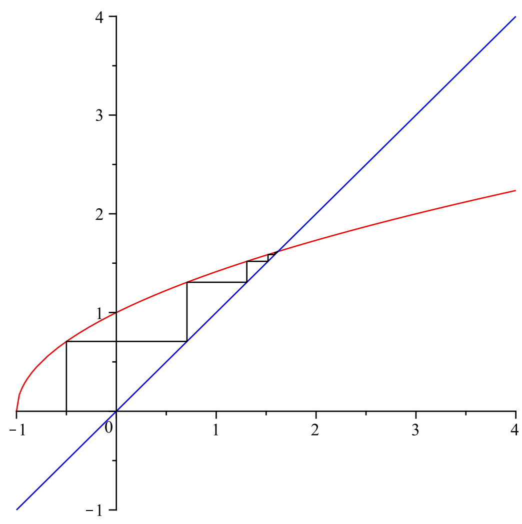
La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est définie sur l'intervalle $I = [-1, +\infty[$ et cet intervalle est stable par f puisque $f(I) = [0, +\infty[\subset I$. La suite (u_n) est donc bien définie si l'on initialise avec $u_0 \in I$. Recherchons les points fixes de f :

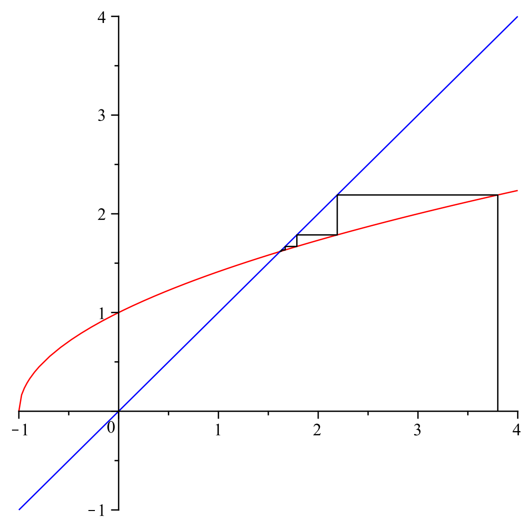
$$f(x) = x \iff \sqrt{1+x} = x \iff \left\{ 1 + x = x^2 \quad \text{et} \quad x \geq 0 \right\} \iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\textit{nombre d'or}) \,.$$

Posons désormais $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ pour simplifier l'écriture. Comme f est continue sur I, la seule limite possible pour la suite (u_n) est α. De la croissance de f sur I, on déduit que chacun des intervalles $I_1 = [-1, \alpha]$ et $I_2 = [\alpha, +\infty[$ est stable par f. D'autre part, on a $f(x) \geq x$ sur I_1 et $f(x) \leq x$ sur I_2. Donc :

- si $u_0 \in I_1$, alors la suite (u_n) est croissante. Comme elle est majorée par α, elle converge. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ (car seule limite possible).

- si $u_0 \in I_2$, la suite est décroissante. Elle converge car elle est minorée par α. Enfin, ici aussi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.





Dessins réalisés avec $u_0 = -0.5$ *et* $u_0 = 3.8$ *respectivement*

SUITES 2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \sin(u_n)\,.$$

a. Montrer que (u_n) décroît et tend vers zéro.

b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, avec $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.

c. *On rappelle le lemme de Cesàro, hors programme, que l'on ne demande pas de démontrer : si* (v_n) *est une suite réelle de limite* l*, alors on a aussi* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k = l$. En déduire un équivalent de la suite (u_n).

- -

a. Le segment $[0,1]$ est stable par la fonction sinus et $\sin x \leq x$ sur cet intervalle, donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge. La fonction sinus étant continue, la limite l de la suite (u_n) vérifie $\sin(l) = l$, et on s'assure que $l = 0$ est la seule solution.

b. On a $v_n = \dfrac{1}{\sin^2 u_n} - \dfrac{1}{u_n^2} = \dfrac{u_n^2 - \sin^2 u_n}{u_n^2 \sin^2 u_n}$. Comme u_n tend vers zéro, on peut utiliser le développement limité en 0 de la fonction sinus pour montrer que le dénominateur est équivalent à u_n^4 alors que le numérateur est équivalent à $\dfrac{1}{3}u_n^4$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{3}$.

c. Soit $w_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$; on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{1}{3}$ par Cesàro, mais par télescopage, $w_n = \dfrac{1}{n\,u_n^2} - \dfrac{1}{n\,u_0^2}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\,u_0^2} = 0$, il reste $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\,u_n^2} = \dfrac{1}{3}$, soit $u_n^2 \sim \dfrac{3}{n}$ et, comme u_n est positif, $u_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

SUITES 3. Soient (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n\ .$$

Que dire de la suite $(u_n - v_n)$? Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

- -

On note que $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n$, la suite $(u_n - v_n)$ est donc constante, de valeur $u_0 - v_0 = -1$. Donc $u_n = v_n - 1$ pour tout n.

En remplaçant dans la deuxième relation de récurrence, on a alors $v_{n+1} = 2(v_n - 1) + 3v_n$, soit $v_{n+1} = 5v_n - 2$, on reconnaît l'expression d'une suite arithmético-géométrique, on résout alors l'équation $l = 5l - 2$, ce qui donne $l = \dfrac{1}{2}$, et on introduit la suite (w_n) telle que $w_n = v_n - \dfrac{1}{2}$. On constate alors que $w_{n+1} = 5w_n$, la suite (w_n) est géométrique de raison 5, donc $w_n = 5^n w_0 = \dfrac{3}{2} \times 5^n$, puis $v_n = w_n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \times 5^n + \dfrac{1}{2}$.

Enfin, $u_n = v_n - 1 = \dfrac{3}{2} \times 5^n - \dfrac{1}{2}$.

SUITES 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = x\,e^x - n$.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n, et montrer qu'elle est strictement positive.

b. Montrer les inégalités $1 \leq u_n \leq \ln(n)$ pour $n \geq 3$.

c. Montrer que $u_n \sim \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d. Trouver un équivalent de $u_n - \ln(n)$.

- -

a. Soit $f = f_0 : x \mapsto xe^x$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = (x+1)e^x$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$, strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. Comme f est négative sur $\mathbb{R}_-$, l'équation proposée $f(x) = n$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}_-$. Mais f établit une bijection (continue strictement croissante) de $]0, +\infty[$ vers son image qui est aussi $]0, +\infty[$, donc l'équation proposée admet bien une unique solution réelle u_n, qui appartient à $\mathbb{R}_+^*$.

b. On a $f(1) = e < n = f(u_n)$ dès que $n \geq 3$; comme f est croissante, on en déduit $u_n \geq 1$. De même, $f(\ln n) = (\ln n)\, e^{\ln(n)} = n\, \ln(n) > n = f(u_n)$, donc par la croissance de f, on déduit aussi $u_n \leq \ln(n)$.

c. Pour tout n, on a $u_n\, e^{u_n} = n$, soit **(*)**: $\ln(u_n) + u_n = \ln(n)$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$: en effet, notons g la bijection réciproque de la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$, c'est aussi une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$ donc qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = +\infty$. Par croissance comparée, on a donc $\ln(u_n) = o(u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. De **(*)**, on déduit alors $u_n \sim \ln(n)$.

d. On a ensuite $u_n - \ln(n) = -\ln(u_n)$. Comme $u_n \sim \ln(n)$, on peut écrire $u_n = (1+\varepsilon_n)\ln(n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Du coup, $\ln(u_n) = \ln(\ln n) + \ln(1+\varepsilon_n)$, le deuxième terme étant alors évidemment négligeable devant le premier, donc $\ln(u_n) \sim \ln(\ln n)$. Donc

$$u_n - \ln(n) \sim -\ln(\ln n)\ .$$

SÉRIES NUMÉRIQUES

SÉRIES 1. Calculer les sommes

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{et} \qquad T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\ .$$

- -

Les deux séries sont convergentes, puisque leurs termes généraux sont respectivement équivalents à $\dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n^3}$.

• On décompose en éléments simples: $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, on observe alors un télescopage en calculant une somme partielle:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}\ ,$$

puis $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

• On décompose en éléments simples: $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+2)}$. Ici aussi, on observe un télescopage lors du calcul d'une somme partielle:

$$
\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \,,
\end{aligned}
$$

les termes pour k de 3 à n s'annihilant. Enfin, $T = \lim_{n\to+\infty} T_n = \dfrac{1}{4}$.

SÉRIES 2. En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer la partie entière du nombre

$$N = \sum_{k=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt{k}} \,.$$

- -

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue et strictement décroissante, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut alors écrire $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} < \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} < \frac{1}{\sqrt{k}}$, ou encore $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} < \frac{1}{\sqrt{k}} < \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$, l'inégalité de droite étant prise en compte seulement pour $k \geq 2$ (même si elle a aussi un sens pour $k = 1$). En sommant ces inégalités, on obtient

$$\int_1^{10001} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} < N = \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} < 1 + \int_1^{10000} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \,,$$

soit $2\big(\sqrt{10001} - 1\big) < N < 1 + 2(100-1) = 199$.

Comme, d'autre part, $2\big(\sqrt{10001} - 1\big) > 2(100-1) = 198$, on a donc $198 < N < 199$ et $\lfloor N \rfloor = 198$.

SÉRIES 3. Étudier la suite (u_n) définie par $0 < u_0 \leq \dfrac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Déterminer la nature des séries de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, puis u_n^2 et enfin u_n.

- -

- Soit $f : x \mapsto \sin x$. L'intervalle $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est stable par f puisque son image est $]0,1]$ et on a $f(x) \leq x$ pour tout $x \in I$ (rappelons en effet l'inégalité classique $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leq |x|$). On en déduit que la suite (u_n) prend toutes ses valeurs dans l'intervalle I, et qu'elle est décroissante. Comme elle est décroissante et minorée, elle converge donc vers un point adhérent à I (c'est-à-dire appartenant à $\overline{I} = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$) et qui est un point fixe de f. On a donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, car c'est le seul point fixe de f.

- La première série considérée est "télescopique", exprimons en effet sa somme partielle d'ordre n :
$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \big[\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\big] = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad -\infty$$
puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Cette série (à termes négatifs) est donc divergente.
- Reprenons le terme général de la série précédente, et faisons-en un petit développement limité : puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, il est légitime d'écrire
$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= \ln\left(\frac{\sin u_n}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n - \frac{1}{6}u_n^3 + o(u_n^3)}{u_n}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{6}\,u_n^2 + o(u_n^2)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6}\,u_n^2 \,. \end{aligned}$$
Autrement dit, $u_n^2 \sim -6\ \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Ce sont des séries à termes positifs, le critère des équivalents s'applique donc : les deux séries sont de même nature, donc $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^2$ diverge.
- Comme $0 < u_n \leq 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < u_n^2 < u_n$: la divergence de $\sum\limits_{n} u_n^2$ entraîne alors la divergence de la série $\sum\limits_{n} u_n$.

SÉRIES 4. Déterminer la nature des séries suivantes et, en cas de convergence, calculer leur somme :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$; **b)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \big(\ln n + a\ \ln(n+1) + b\ \ln(n+2)\big)$ avec a et b réels.

- -

a. Posons $u_n = \dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}$. On a $u_n \sim \dfrac{1}{9n^2}$, ce qui assure déjà la convergence de la série.

Décomposons en éléments simples : $u_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n+1} - \dfrac{1}{3n+4}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n+1} - \dfrac{1}{3(n+1)+1}\right)$.

Si l'on note S_n la somme partielle d'ordre n, on observe un télescopage :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3(k+1)+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{3k+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+4}\right) .$$
Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{3}$, c'est-à-dire que $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{3}$.

b. Posons $u_n = \ln n + a\ \ln(n+1) + b\ \ln(n+2)$, et cherchons-en un équivalent!

En utilisant le DL "fort" à l'ordre un en zéro de $\ln(1+x)$, soit $\ln(1+x) = x + O(x^2)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
u_n &= (1+a+b)\ \ln(n) + a\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b\ \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \\
&= (1+a+b)\ \ln(n) + a\left(\frac{1}{n} + O\big(\frac{1}{n^2}\big)\right) + b\left(\frac{2}{n} + O\big(\frac{1}{n^2}\big)\right) \\
&= (1+a+b)\ \ln(n) + \frac{a+2b}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\ .
\end{aligned}
$$

On en déduit la discussion suivante:

- si $a+b+1 \neq 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$, la série est donc grossièrement divergente ;

- si $a+b+1=0$ et $a+2b \neq 0$, alors $u_n \sim (a+2b)\dfrac{1}{n}$. Par comparaison à la série harmonique, on déduit que $\sum u_n$ diverge. *Le critère des équivalents s'applique car l'équivalent trouvé montre que u_n reste de signe constant à partir d'un certain rang.*

- si $a+b+1=0$ et $a+2b=0$, alors $u_n = O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$, la série $\sum u_n$ est alors absolument convergente.

Bilan. La série $\sum u_n$ converge *si et seulement si* $a=-2$ et $b=1$.

Posons donc maintenant $u_n = \ln n - 2\ \ln(n+1) + \ln(n+2)$. On constate que $u_n = v_n - v_{n+1}$ en posant $v_n = \ln(n) - \ln(n+1)$, on reconnaît donc une série télescopique. Si on note S_n sa somme partielle d'ordre n, on a

$$
S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}(v_k - v_{k+1}) = v_1 - v_{n+1} = \ln(n+2) - \ln(n+1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln(2)\ .
$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\ln(2)$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln(2)$.

FONCTIONS INTÉGRABLES (INT)

INT 1. En utilisant une somme de Riemann, donner un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

- -

Rappelons que, si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, alors la somme de Riemann $R_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$ tend vers l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$.

En choisissant $f : x \mapsto \sqrt{x}$, on a

$$
R_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}\,S_n \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ .
$$

Donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{3}\, n^{\frac{3}{2}}$.

INT 2. Pour p et q entiers naturels, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_a^b (t-a)^p (b-t)^q\,\mathrm{d}t$.

a. Trouver une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

b. Exprimer $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles.

- -

a. Une hipépé donne directement

$$I_{p,q} = \left[\frac{(t-a)^{p+1}}{p+1}\,(b-t)^q\right]_a^b + \frac{q}{p+1}\int_a^b (t-a)^{p+1}\,(b-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t = \frac{q}{p+1}\,I_{p+1,q-1}\,.$$

b. Par une récurrence immédiate, pour tout $k \in [\![0,q]\!]$, on a

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1}\,\frac{q-1}{p+2}\cdots\frac{q-k+1}{p+k}\,I_{p+k,q-k}$$

et, en particulier, pour $k = q$, on obtient

$$I_{p,q} = \frac{q(q-1)\cdots 1}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q)} I_{p+q,0} = \frac{p!\,q!}{(p+q)!}\,I_{p+q,0} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}\,(b-a)^{p+q+1}\,.$$

INT 3. Quelle est la nature des intégrales généralisées suivantes ?

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}\ ;\quad I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t\ ;\quad I_3 = \int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t\ ;\quad I_4 = \int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\mathrm{d}t\,.$$

- -

a. La fonction positive $f : t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$ n'est pas intégrable sur $]0,1[$. En effet, au voisinage de 1, on a $f(t) \sim \dfrac{1}{1-t}$ et cette dernière fonction n'est pas intégrable en 1 puisque $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ n'est pas intégrable en 0. L'intégrale I_1 est donc divergente.

b. Soit $f : t \mapsto e^{-t}\,\ln(t)$, alors f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$. En effet,

- sur $]0,1]$, on a $\bigl|f(t)\bigr| \leq \bigl|\ln(t)\bigr|$, et la fonction ln est intégrable sur $]0,1]$, donc f est intégrable sur $]0,1]$.

- au voisinage de $+\infty$, on a $t^2 f(t) = t^2\,e^{-t}\,\ln(t) = o(t^3\,e^{-t})$ et cette expression tend vers 0 par croissances comparées, donc $f(t) = o\Bigl(\dfrac{1}{t^2}\Bigr)$ en $+\infty$, ce qui entraîne l'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$.

L'intégrale I_2 est donc (absolument) convergente.

c. Soit $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2+1}$, alors f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$. En effet,

- sur $]0,1]$, on a $\bigl|f(t)\bigr| \leq \bigl|\ln(t)\bigr|$, et la fonction ln est intégrable en 0, donc f est intégrable en 0.

- au voisinage de $+\infty$, on a $t^{3/2}\, f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^{3/2}}\Big)$ en $+\infty$ d'où l'intégrabilité de f en $+\infty$.

L'intégrale I_3 est donc (absolument) convergente.

d. Soit $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}$, alors f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. En effet,

- on a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et cette dernière fonction est intégrable sur $]0,1]$, donc f est intégrable sur $]0,1]$.

- au voisinage de $+\infty$, on a $t^{5/4}\, f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^{1/4}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^{5/4}}\Big)$ en $+\infty$ d'où l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$.

L'intégrale I_4 est donc convergente.

INT 4. Convergence et calcul des intégrales généralisées suivantes:

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(t)} \;;\quad I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \;;\quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \;;\quad I_4 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t\ .$$

- -

a. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}(t)}$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$, et $f(t) = \dfrac{2}{e^t - e^{-t}}$, on a donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 2e^{-t}$. Comme $t \mapsto 2e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, la fonction f l'est aussi.

Pour le calcul, on pose $u = e^t$, on a alors

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{e^t - e^{-t}} = 2\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} = \int_e^{+\infty} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = \left[\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right]_e^{+\infty},$$

donc $I_1 = \ln\left(\dfrac{e+1}{e-1}\right)$.

b. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ est définie et continue sur $]0,1]$, et on a $t^{3/4} f(t) = t^{1/4}\ln(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, donc $f(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^{3/4}}\Big)$ au voisinage. Comme $\dfrac{3}{4} < 1$, cette dernière fonction (de type Riemann) est intégrable sur $]0,1]$, donc f est aussi intégrable sur $]0,1]$ par comparaison.

Pour le calcul, on pose $u = \sqrt{t}$, on a alors

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2\ln(u)}{u}\,2u\,\mathrm{d}u = 4\int_0^1 \ln(u)\,\mathrm{d}u = -4\ .$$

c. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$. On a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, ce qui entraîne l'intégrabilité de f sur $]0,1]$. De plus, $t^{3/2}\, f(t) = t\, e^{-\sqrt{t}} = e^{\ln(t)-\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$

donc $f(t)=o\Big(\dfrac{1}{t^{3/2}}\Big)$ au voisinage de $+\infty$, ce qui entraîne l'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$.

Pour le calcul, on pose $u=\sqrt{t}$, on a alors

$$I_3=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,2u\,\mathrm{d}u=2\int_0^{+\infty}e^{-u}\,\mathrm{d}u=2\ .$$

d. La fonction $f\ :\ t\mapsto\dfrac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}$ est définie et continue sur $]0,1[$. On a $f(t)\underset{t\to 0}{\sim}\ln(t)$ d'où l'intégrabilité de f sur $\Big]0,\dfrac{1}{2}\Big]$, et f est prolongeable par continuité au point 1, puisque $f(t)\underset{t\to 1}{\sim}\dfrac{t-1}{\sqrt{1-t}}=-\sqrt{1-t}$, donc $\lim\limits_{t\to 1^-}f(t)=0$. Donc f est intégrable sur $]0,1[$.

Pour le calcul, on pose $u=\sqrt{1-t}$, on a alors

$$I_4=\int_1^0\frac{\ln(1-u^2)}{u}\,(-2u)\,\mathrm{d}u=2\int_0^1\big(\ln(1+u)+\ln(1-u)\big)\,\mathrm{d}u=2\int_0^2\ln(u)\,\mathrm{d}u=4\,\ln(2)-4$$

après quelques transformations d'écriture laissées au vaillant lecteur.

INT 5. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(e^t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

La fonction $t\mapsto\sin(e^t)$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

- -

La fonction $f\ :\ t\mapsto\sin(e^t)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Écrivons une intégrale partielle, et intégrons par parties:

$$\begin{aligned}\int_0^x\sin(e^t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x e^{-t}\cdot e^t\sin(e^t)\,\mathrm{d}t\\ &= \Big[-e^{-t}\,\cos(e^t)\Big]_0^x-\int_0^x e^{-t}\,\cos(e^t)\,\mathrm{d}t\\ &= \cos(1)-e^{-x}\,\cos(e^x)-\int_0^x e^{-t}\,\cos(e^t)\,\mathrm{d}t\ .\end{aligned}$$

Comme $\big|e^{-x}\cos(e^x)\big|\leq e^{-x}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\cos(e^x)=0$. La même majoration de la valeur absolue montre que la fonction $t\mapsto e^{-t}\,\cos(e^t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\cos(e^t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. Ainsi, l'intégrale partielle $\displaystyle\int_0^x\sin(e^t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, ce qui est la définition de la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(e^t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque. On peut montrer que cette intégrale n'est pas absolument convergente, autrement dit la fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. L'insatiable lecteur vérifiera en effet que le changement de variable $u = e^t$ transforme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\sin(e^t)\right| \mathrm{d}t$ en l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(u)}{u}\right| \mathrm{d}u$, qui est divergente, c'est bien connu.

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS (SSF)

SSF 1. On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2\, x\,(1-x)^n$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $[0,1]$.

b. Étudier la convergence (simple, uniforme) de la suite (f_n) sur $[0,1]$.

c. A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x$?

d. Montrer que, pour tout $\alpha \in]0,1[$, il y a convergence uniforme de la suite (f_n) sur le segment $[\alpha,1]$.

- -

a. On calcule $f_n'(x) = n^2(1-x)^{n-1}\big(1-(n+1)x\big)$, on en déduit que f_n est croissante sur $[0,\alpha_n]$, puis décroissante sur $[\alpha_n,1]$ avec $\alpha_n = \dfrac{1}{n+1}$, et d'autre part $f_n(0) = f_n(1) = 0$. *Dresser un tableau de variations*!

b. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, c'est évident pour $x = 0$ et $x = 1$, et pour $x \in]0,1[$, on le voit en tranformant l'expression avec exponentielles et logarithmes. Il y a donc convergence simple de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction nulle sur $[0,1]$

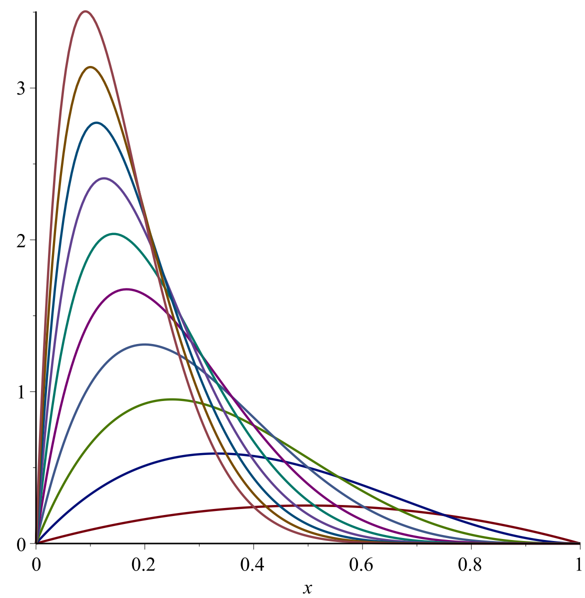
Mais $\displaystyle\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n\Big(\frac{1}{n+1}\Big) = \frac{n^2}{n+1}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[0,1]$. . On observe sur le schéma une "bosse grimpante".

c. En posant par exemple le changement de variable $t = 1-x$, on obtient que $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors que $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = 0$.

d. Fixons $\alpha \in]0,1[$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on aura $\dfrac{1}{n+1} \leq \alpha$ à partir d'un certain rang N. Pour $n \geq N$, la fonction f_n est alors positive et décroissante sur le segment $S = [\alpha,1]$, donc

$$\forall n \geq N \qquad \|f_n\|_{\infty,S} = \sup_{x\in S} |f_n(x)| = f_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ ;$$

il y a donc convergence uniforme sur S.



SSF 2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$. En déduire la valeur des intégrales
$$I_n = \int_0^\pi \frac{2\cos x - 1}{5 - 4\cos x}\ \cos nx \,\mathrm{d}x \qquad (n \in \mathbb{N})\ .$$

- -

Calculons d'abord
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{2^n} = \frac{e^{ix}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n = \frac{e^{ix}}{2 - e^{ix}} = \frac{e^{ix}\,(2 - e^{-ix})}{(2 - e^{ix})\,(2 - e^{-ix})} = \frac{2e^{ix} - 1}{5 - 4\cos x}\ .$$

On a reconnu une série géométrique de raison $\dfrac{e^{ix}}{2}$. Il ne reste plus qu'à extraire la partie réelle :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{2^k} = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{2^k}\right) = \frac{2\cos x - 1}{5 - 4\cos x}\ .$$

Fixons un entier naturel n, posons alors $f(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{5 - 4\cos x}\ \cos(nx) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$, avec $u_k(x) = \dfrac{\cos(kx)\ \cos(nx)}{2^k}$. Comme $\|u_k\|_\infty = \dfrac{1}{2^k}$, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 1} u_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, en particulier elle converge uniformément sur le segment $[0, \pi]$, ce qui autorise à intervertir série et intégrale. Par ailleurs,

$$\int_0^\pi \cos(kx)\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos\big((k+n)x\big)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos\big((k-n)x\big)\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad k=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On obtient finalement $I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \int_0^\pi \cos(kx)\ \cos(nx)\ \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n=0 \\ \dfrac{\pi}{2^{n+1}} & \text{sinon} \end{cases}.$

SSF 3. Soit $\alpha > 0$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x) = x^\alpha\ e^{-nx^2}$.

a. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, et normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. Déterminer la fonction somme.

b. Pour quelles valeurs de α la convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

- -

a. Pour $x = 0$, on convient de poser $0^\alpha = 0$ lorsque α est strictement positif (il est vrai que l'énoncé devrait le préciser), ce qui est cohérent puisqu'alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$. On a donc $u_n(0) = 0$ pour tout n.

Pour $x > 0$, on écrit $u_n(x) = x^\alpha\big(e^{-x^2}\big)^n$, on reconnaît alors une série géométrique de raison $e^{-x^2} \in]0, 1[$, d'où sa convergence.

On a ainsi la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+$ et l'expression de sa somme s: $s(0) = 0$ et, pour $x > 0$,

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{x^\alpha}{1 - e^{-x^2}}\ .$$

La fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$u_n'(x) = x^{\alpha-1}\ e^{-nx^2}\ (\alpha - 2nx^2)\ .$$

Comme u_n est positive avec $u_n(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$, on déduit que $|u_n| = u_n$ est une fonction croissante sur $\left[0, \sqrt{\dfrac{\alpha}{2n}}\right]$ et décroissante sur $\left[\sqrt{\dfrac{\alpha}{2n}}, +\infty\right[$, donc que, pour tout $a > 0$, on a $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = u_n(a)$ qui est le terme général d'une série convergente d'après la question **a.** Ainsi, la convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est normale sur toute demi-droite de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

b. Sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\|u_n\|_\infty = u_n\Big(\sqrt{\frac{\alpha}{2n}}\Big) = \Big(\sqrt{\frac{\alpha}{2n}}\Big)^\alpha\ e^{\frac{\alpha}{2}} = K_\alpha\ \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\ ,$$

où K_α est une constante strictement positive. De l'étude des séries de Riemann, on déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\alpha > 2$.

ALGÈBRE LINÉAIRE (ALG)

ALG 1. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille libre de vecteurs dans un espace vectoriel E, soit a un vecteur de E n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$. Montrer que la famille $(e_1 + a, \cdots, e_p + a)$ est libre.

- -

Supposons $\lambda_1(e_1 + a) + \cdots + \lambda_p(e_p + a) = 0_E$ avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ scalaires. On a alors $(*) : (\lambda_1 + \cdots + \lambda_p)a = -(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p)$.

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$, on déduit $a = -\dfrac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p}\,(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p) \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$, ce qui est exclu.

On a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 0$, puis $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0_E$ d'après $(*)$, ce qui entraîne que tous les λ_i sont nuls puisque la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre. On a ainsi prouvé que la famille $(e_1 + a, \cdots, e_p + a)$ est libre aussi.

ALG 2. Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. On suppose que p et q commutent ($p \circ q = q \circ p$). Montrer que $f = p \circ q$ et $g = p + q - p \circ q$ sont des projecteurs de E, déterminer leur image et leur noyau en fonction des images et noyaux de p et q. *On pourra éventuellement noter que* $\mathrm{id}_E - g = (\mathrm{id}_E - p) \circ (\mathrm{id}_E - q)$.

- -

• Il est immédiat que $f \circ f = f$, donc f est un projecteur. De $f = p \circ q$, on tire $\mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}\, f$. Comme on a aussi $f = q \circ p$, alors $\mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}\, f$. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\, f$ contient les deux sous-espaces $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, q$, donc il contient leur somme : $\mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}\, f$. Inversement, si $x \in \mathrm{Ker}\, f$, on écrit $x = q(x) + \big(x - q(x)\big)$, avec $q(x) \in \mathrm{Ker}\, p$ et $x - q(x) \in \mathrm{Ker}\, q$ (*vérifications immédiates, laissées au lecteur*). Donc $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q$.
De même, de $f = p \circ q$, on tire $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, p$, et de $f = q \circ p$, on tire $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, q$. Donc $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$. Inversement, si $x \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$, alors $x = p(x) = q(x)$ (*tout vecteur appartenant à l'image d'un projecteur est invariant par ce projecteur*), donc $x = p\big(q(x)\big) = f(x) \in \mathrm{Im}\, f$. Finalement, $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$.

• Notons $p' = \mathrm{id}_E - p$ et $q' = \mathrm{id}_E - q$: ce sont les projecteurs respectivement "associés" aux projecteurs p et q (*cf.* cours), autrement dit ce sont des projecteurs tels que $\mathrm{Im}\, p' = \mathrm{Ker}\, p$, $\mathrm{Ker}\, p' = \mathrm{Im}\, p$, et de même $\mathrm{Im}\, q' = \mathrm{Ker}\, q$ et $\mathrm{Ker}\, q' = \mathrm{Im}\, q$. De plus, p' et q' commutent (*évident*). Donc, en appliquant ce qui précède, $g' = p' \circ q' = q' \circ p'$ est un projecteur tel que

$$\mathrm{Ker}\, g' = \mathrm{Ker}\, p' + \mathrm{Ker}\, q' = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\, g' = \mathrm{Im}\, p' \cap \mathrm{Im}\, q' = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q\ .$$

Comme $g = \mathrm{id}_E - g'$, donc g est le projecteur associé à g', c'est donc le projecteur tel que

$$\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, g' = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\, g = \mathrm{Ker}\, g' = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q\ .$$

ALG 3. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E vérifiant la relation $u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id}_E = 0$. Démontrer la relation

$$E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}_E)\ .$$

- -

Première méthode : par analyse-synthèse

• **Analyse :** Soit $x \in E$, supposons **(*)** : $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $z \in \mathrm{Ker}(u-2\,\mathrm{id}_E)$; on a alors $u(y) = y$ et $u(z) = 2z$, donc **(**)** : $u(x) = u(y)+u(z) = y+2z$. Des relations **(*)** et **(**)**, on tire que $y = 2x - u(x)$ et $z = u(x) - x$. Ce sont des conditions **nécessaires** portant sur y et z : si une décomposition du vecteur x existe, ce **ne** peut être **que** celle-ci, on a donc prouvé l'**unicité**.

• **Synthèse :** c'est une vérification consistant à prouver que les vecteurs x et y obtenus ci-dessus répondent bien à toutes les conditions imposées. Soit donc $x \in E$, posons $y = 2x - u(x)$ et $z = u(x) - x$. On vérifie immédiatement que $y + z = x$. Par ailleurs,

$$(u-\mathrm{id}_E)(y) = -(u-\mathrm{id}_E)\big(u(x)-2x\big) = -\big((u-\mathrm{id}_E)\circ(u-2\,\mathrm{id}_E)\big)(x) = -(u^2-3u+2\,\mathrm{id}_E)(x) = 0$$

d'après l'hypothèse de l'énoncé, donc $y \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$. De même,

$$(u-2\,\mathrm{id}_E)(z) = (u-2\,\mathrm{id}_E)\big(u(x)-x\big) = \big((u-2\,\mathrm{id}_E)\circ(u-\mathrm{id}_E)\big)(x) = (u^2-3u+2\,\mathrm{id}_E)(x) = 0$$

donc $z \in \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}_E)$. Cette "synthèse" montre que les conditions données sur y et z sont **suffisantes** et prouve l'**existence** de la décomposition.

Moralité : $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}_E)$.

Deuxième méthode : en utilisant le cours sur les projecteurs

Posons $p = u - \mathrm{id}_E$, alors

$$p^2 = (u - \mathrm{id}_E)^2 = u^2 - 2u + \mathrm{id}_E = 3u - 2\,\mathrm{id}_E - 2u + \mathrm{id}_E = u - \mathrm{id}_E = p\ :$$

l'endomorphisme p est donc un projecteur de l'espace E ; son **projecteur associé** est $q = \mathrm{id}_E - p = \mathrm{id}_E - (u - \mathrm{id}_E) = 2\,\mathrm{id}_E - u$. *Rappelons que deux projecteurs p et q sont dits* **associés** *s'ils vérifient la relation $p + q = \mathrm{id}_E$, et que cette relation équivaut aux conditions* $\{\mathrm{Ker}\,q = \mathrm{Im}\,p\ ;\ \mathrm{Im}\,q = \mathrm{Ker}\,p\}$. On sait enfin que l'image et le noyau d'un projecteur sont supplémentaires (*géométriquement, l'image est le sous-espace sur lequel on projette, le noyau est la direction de projection*), on a donc

$$E = \mathrm{Ker}\,p \oplus \mathrm{Im}\,p = \mathrm{Ker}\,p \oplus \mathrm{Ker}\,q = \mathrm{Ker}\,p \oplus \mathrm{Ker}(-q) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}_E)\ .$$

ALG 4. Soit n un entier au moins égal à 2, soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par

$$\Phi\ :\ P \mapsto Q \quad \text{tel que} \quad Q(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2\,P(X)\ .$$

Déterminer le degré du polynôme $Q_k = \Phi(X^k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. En déduire l'image de Φ. Déterminer le noyau de Φ.

- -

On s'assure d'abord que Φ est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$: la linéarité est immédiate, et si $Q = \Phi(P)$, on a manifestement $\deg(Q) \leq \deg(P)$, donc Φ va de $\mathbb{K}_n[X]$ dans lui-même.

Mais il y a mieux : calculons les images par Φ des polynômes de la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Déjà $Q_0 = \Phi(1) = 0$ et $Q_1 = \Phi(X) = 0$, d'où l'inclusion $\mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(1, X) \subset \mathrm{Ker}\,\Phi$. Pour $k \geq 2$, on montre (*calcul laissé à l'estimable lecteur*) que le polynôme $Q_k = \Phi(X^k)$ est de degré $k-2$ exactement, les termes de degrés k et $k-1$ s'annihilant mais pas ceux de degré $k-2$, puisque le coefficient de X^{k-2} dans Q_k est $k(k-1)$.

Or, $\mathrm{Im}\,\Phi$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$ engendré par les vecteurs $\Phi(X^k)$ pour $0 \leq k \leq n$, ou encore pour $2 \leq k \leq n$, puisque les deux premiers sont nuls. La famille $(Q_2, \cdots, Q_n)$ est constituée de polynômes non nuls de degrés tous distincts (famille échelonnée en degrés), elle est donc libre ; et comme elle est constituée de $n-1$ polynômes de $\mathbb{K}_{n-2}[X]$ qui est de dimension $n-1$, c'est une base de $\mathbb{K}_{n-2}[X]$. Donc $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{K}_{n-2}[X]$.

Donc $\mathrm{rg}(\Phi) = \dim(\mathrm{Im}\,\Phi) = n-1$, puis $\dim(\mathrm{Ker}\,\Phi) = (n+1)-(n-1) = 2$ par le théorème du rang. Comme $\mathrm{Ker}\,\Phi$ contient $\mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2, alors $\mathrm{Ker}\,\Phi = \mathbb{R}_1[X]$.

ALG 5. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On considère les quatre assertions suivantes:

(1) : $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$

(2) : $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$

(3) : $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$

(4) : $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$.

a. Montrer que $(\mathbf{1}) \iff (\mathbf{3})$ et $(\mathbf{2}) \iff (\mathbf{4})$.

b. Montrer que les quatre assertions sont équivalentes si E est de dimension finie.

c. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

- -

a. $(\mathbf{1}) \Longrightarrow (\mathbf{3})$: Supposons $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$, soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, alors $f(x) = 0_E$ et il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$. Alors $f^2(t) = f(x) = 0_E$, i.e. $t \in \mathrm{Ker}(f^2)$. D'après l'hypothèse, $t \in \mathrm{Ker}(f)$, soit $x = f(t) = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.

$(\mathbf{3}) \Longrightarrow (\mathbf{1})$: Supposons $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$. L'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ est triviale. Par ailleurs, si $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$, alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(x) = 0_E$ d'après l'hypothèse, et $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

$(\mathbf{2}) \Longrightarrow (\mathbf{4})$: Supposons $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$. Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, donc $f(x) \in \mathrm{Im}(f^2)$ et il existe $t \in E$ tel que $f(x) = f^2(t)$, i.e. $f\big(x - f(t)\big) = 0_E$, donc $x - f(t) \in \mathrm{Ker}(f)$. On a donc $x = \big(x - f(t)\big) + f(t) \in \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. On a ainsi prouvé que $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$.

$(\mathbf{4}) \Longrightarrow (\mathbf{2})$: Supposons $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$. L'inclusion $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ est triviale. Soit alors $x \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$, et l'hypothèse faite permet de décomposer $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y_2 \in \mathrm{Im}(f)$, donc $y_2 = f(z)$ avec $z \in E$. On a alors $x = f(y_1) + f(y_2) = f(y_2) = f^2(z) \in \mathrm{Im}(f^2)$, ce qui prouve l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$.

b. Supposons $\dim(E) = n$. Si on a **(1)**, alors $\dim\big(\mathrm{Im}(f^2)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = n - \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$ par le théorème du rang. Comme on a l'inclusion triviale $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$, on déduit l'égalité, ainsi $(\mathbf{1}) \Longrightarrow (\mathbf{2})$. On montre de même que $(\mathbf{2}) \Longrightarrow (\mathbf{1})$. Les quatre assertions sont donc équivalentes.

c. Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $f = D : P \mapsto P'$ (opérateur de dérivation). Alors D est surjectif (tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ admet pour antécédent par D le polynôme $\sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$ entre autres), donc D^2 l'est aussi et $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Im}(D^2) = E$. Mais on a $\mathrm{Ker}(D) = \mathbb{K}_0[X]$ et $\mathrm{Ker}(D^2) = \mathbb{K}_1[X]$, donc $\mathrm{Ker}(D^2) \neq \mathrm{Ker}(D)$. Cet endomorphisme D de E satisfait **(2)** et **(4)**, mais pas **(1)** et **(3)**.

Toujours avec $E = \mathbb{K}[X]$, l'endomorphisme $f : P \mapsto XP$ satisfait **(1)** et **(3)**, mais pas **(2)** et **(4)**. *L'estimable lecteur écrira les détails.*

ALG 6.a. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe une matrice-colonne $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et une matrice-ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telles que $M = CL$. Réciproque ?

b. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit u un endomorphisme de E, de rang 1. Démontrer la relation $u \circ u = \mathrm{tr}(u) \cdot u$

- -

a. Méthode 1. Les colonnes $C_1, \cdots, C_n$ de la matrice A sont toutes colinéaires (ou "proportionnelles"), et une au moins d'entre elles, disons C_{j_0}, est non nulle. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe alors un scalaire λ_j tel que $C_j = \lambda_j C_{j_0}$. On a alors $A = C_{j_0} L$, avec la matrice-ligne $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. *On a alors, bien sûr,* $\lambda_{j_0} = 1$.

Méthode 2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice A, on a alors $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(A) = 1$, donc $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = n - 1$ par le théorème du rang. Soit alors $(e_1, \cdots, e_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$, on la complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ de E. *Attention! On n'a pas forcément* $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$, *donc le vecteur* e_n *n'appartient pas nécessairement à* $\mathrm{Im}(u)$. Dans une telle base, l'endomorphisme u est représenté par une matrice de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$, i.e. les $n-1$ premières colonnes de M sont nulles. En posant $C' = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, on a $M = C' L'$ avec $L' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme A est semblable à M (elles représentent le même endomorphisme), on a $A = PMP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, donc $A = CL$, où $C = PC'$ est une matrice-colonne, et $L = L' P^{-1}$ est une matrice-ligne.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice représentant l'endomorphisme u dans une certaine base de E, alors $\mathrm{rg}(A) = 1$. En partant de l'écriture $A = CL$, on obtient

$$A^2 = (CL)\,(CL) = C\,(LC)\,L = (LC)\,(CL) = \mathrm{tr}(A) \cdot A\,.$$

En effet, $LC \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ autrement dit c'est un scalaire ce qui permet de le faire commuter avec les autres matrices et, en posant $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} l_1 & \cdots & l_n \end{pmatrix}$, on observe que

$A = CL = \begin{pmatrix} c_1 l_1 & \cdots & c_1 l_n \\ \vdots & & \vdots \\ c_n l_1 & \cdots & c_n l_n \end{pmatrix}$, alors que $LC = \sum_{i=1}^{n} c_i l_i = \mathrm{tr}(A)$. En traduisant en termes d'endomorphismes, on a bien $u^2 = \mathrm{tr}(u) \cdot u$.

Remarque. D'après la "méthode 2" de la question précédente, on peut aussi se placer dans une base de E dans laquelle l'endomorphisme u est représenté par une matrice de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$. On a alors $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(M) = a_n$, et on vérifie facilement que $M^2 = a_n M = \mathrm{tr}(M) \cdot M$.

ALG 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ 14 & -12 & 10 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{E} = \Big\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA \Big\}$.

- -

a. On observe que la matrice A est de rang 1, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé admet pour image la droite vectorielle $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(u)$, avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$: *en effet, l'image d'un endomorphisme est le sous-espace engendré par les vecteurs-colonnes.* Le noyau $\mathrm{Ker}\, f$ est le plan vectoriel d'équation $7x - 6y + 5z = 0$. Notons que le vecteur u vérifie cette équation, d'où l'inclusion $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$.

La matrice A représente l'endomorphisme f dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Montrer que A est semblable à B revient à montrer l'existence d'une autre base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle le même endomorphisme f est représenté par la matrice B, ce qui revient à dire que l'on doit avoir $f(u) = f(v) = 0_E$ et $f(w) = u$. Si une telle base existe, on doit avoir $u \in \mathrm{Im}\, f$, choisissons donc pour u le vecteur déjà proposé ci-dessus, à savoir $u = e_1 + 2e_2 + e_3$. Ensuite, w doit être un antécédent de u par f, d'où le choix possible de $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 + e_2$. Enfin, v doit être un vecteur de $\mathrm{Ker}\, f$ non colinéaire à u, par exemple $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 6e_1 + 7e_2$. Il est immédiat de vérifier que ces trois vecteurs u, v, w sont linéairement indépendants, donc constituent une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, et que l'on a bien $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = B$, ce qui prouve que les matrices A et $B = E_{1,3}$ sont semblables puisqu'elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

b. L'ensemble $\mathcal{E}$ est ce que l'on appelle le **commutant** de la matrice A, il est immédiat qu'il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Il est plus facile de déterminer le commutant de la matrice B, à savoir l'ensemble

$$\mathcal{C}_B = \big\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MB\big\} .$$

En effet, il est facile de voir qu'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ commute avec B si et seulement si on a $d = g = h = 0$ et $a = i$, autrement dit si M est de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec a, b, c, e, f cinq réels arbitraires. Ainsi, $\mathcal{C}_B$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de dimension 5 : une base est $(E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. D'autre part, on a $A = PBP^{-1}$, où P est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ construite ci-dessus. On vérifie alors que

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_A \quad &\Longleftrightarrow \quad AM = MA \\ &\Longleftrightarrow \quad PBP^{-1}M = MPBP^{-1} \\ &\Longleftrightarrow \quad BP^{-1}MP = P^{-1}MPB \\ &\Longleftrightarrow \quad P^{-1}MP \in \mathcal{C}_B \end{aligned}$$

ou encore $N \in \mathcal{C}_B \iff PNP^{-1} \in \mathcal{C}_A$. Donc $\mathcal{C}_A$ est l'image de $\mathcal{C}_B$ par l'application $\varphi : N \mapsto PNP^{-1}$. Il est facile de vérifier que $\varphi : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est linéaire et bijective, c'est donc un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle conserve les dimensions, on a donc $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{C}_A = \dim(\mathcal{C}_B) = 5$.

ALG 8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^{n-1} \neq 0_n$ et $A^n = 0_n$.

Montrer que A est semblable à la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$.

- -

Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement représenté par la matrice A, on a alors $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Il existe donc un vecteur x de E tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Soit la famille $\mathcal{B} = \big(u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \cdots, u(x), x\big)$. Montrons que cette famille est libre:

Soient λ_0, $\cdots$, λ_{n-1} des scalaires vérifiant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$. Si ces scalaires étaient non tous nuls, on pourrait considérer l'entier $p = \min\Big(\big\{k \in [\![0, n-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0\big\}\Big)$, on aurait alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$. En appliquant u^{n-1-p}, on obtient $\lambda_p u^{n-1}(x) = 0_E$ et, comme le vecteur $u^{n-1}(x)$ est non nul, il reste $\lambda_p = 0$, ce qui contredit la définition de l'entier p.

Ce raisonnement par l'absurde montre que les coefficients λ_k sont tous nuls, et donc que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Comme $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E) = n$, la famille $\mathcal{B}$ est une base de E, il est alors immédiat que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = N$, et comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = A$, les matrices A et N sont semblables.

ALG 9. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)\, I_n$ pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. Déterminer le noyau de f, son rang. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

c. Prouver la relation $f^2 - (n+2)\, f + (n+1)\ \mathrm{id} = 0$.

d. Déterminer la réciproque f^{-1} de f.

- -

a. Facile (résulte de la linéarité de la trace).

b. Notons que, si une matrice M appartient au noyau de f, alors M est colinéaire à I_n, on en déduit l'inclusion $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Vect}(I_n)$. Par ailleurs, $f(I_n) = (n+1)\, I_n \neq 0_n$. On en déduit que $\mathrm{Ker}\, f = \{0_n\}$, donc f est injectif, donc bijectif (dimension finie), c'est un automorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors bien sûr, $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) = n^2$.

c. On calcule

$$\begin{aligned}
f^2(M) &= f\big(M + \mathrm{tr}(M)\, I_n\big) \\
&= f(M) + \mathrm{tr}(M)\, f(I_n) \qquad \text{par linéarité de } f \\
&= M + \mathrm{tr}(M)\, I_n + (n+1)\, \mathrm{tr}(M)\, I_n \\
&= M + (n+2)\, \mathrm{tr}(M)\, I_n \\
&= (n+2)\, \big(M + \mathrm{tr}(M)\, I_n\big) - (n+1)\, M \\
&= (n+2)\, f(M) - (n+1)\, M\ .
\end{aligned}$$

On a bien obtenu la relation $f^2 - (n+2)\, f + (n+1)\ \mathrm{id} = 0$. Dit autrement, on a obtenu un polynôme annulateur de degré 2.

d. La relation ci-dessus peut s'écrire $f \circ \big(f - (n+2)\ \mathrm{id}\big) = -(n+1)\ \mathrm{id}$, et ces deux endomorphismes commutent, on en déduit que $f^{-1} = \dfrac{1}{n+1}\ \big((n+2)\ \mathrm{id} - f\big)$, ce qui peut s'écrire $f^{-1}(M) = M - \dfrac{\mathrm{tr}(M)}{n+1}\, I_n$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- -

Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement représenté par la matrice A, on a alors $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Il existe donc un vecteur x de E tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Soit la famille $\mathcal{B} = \big(u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \cdots, u(x), x\big)$. Montrons que cette famille est libre:

Soient λ_0, $\cdots$, λ_{n-1} des scalaires vérifiant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$. Si ces scalaires étaient non tous nuls, on pourrait considérer l'entier $p = \min\Big(\big\{k \in [\![0, n-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0\big\}\Big)$, on aurait alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$. En appliquant u^{n-1-p}, on obtient $\lambda_p u^{n-1}(x) = 0_E$ et, comme le vecteur $u^{n-1}(x)$ est non nul, il reste $\lambda_p = 0$, ce qui contredit la définition de l'entier p. Ce raisonnement par l'absurde montre que les coefficients λ_k sont tous nuls, et donc que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Comme $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E) = n$, la famille $\mathcal{B}$ est une base de E, il est alors immédiat que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = N$, et comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = A$, les matrices A et N sont semblables.

DÉTERMINANTS (DET)

DET 1. Calculer les déterminants d'ordre n :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n-1 & n \\ n & \dots & \dots & n & n \end{vmatrix}_{(n)} \quad ; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ a & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n)} .$$

- -

a. Pour calculer D, on retranche à chaque colonne la précédente : $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$ $(2 \leq j \leq n)$, on développe ensuite par rapport à la dernière ligne, ce qui conduit au déterminant d'une matrice triangulaire inférieure (qui est donc le produit de ses éléments diagonaux) :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n-1 & n \\ n & \dots & \dots & n & n \end{vmatrix}_{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ n & 2-n & n-2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 1 \\ n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(n)} = (-1)^{n+1} n \begin{vmatrix} n-1 & & & (0) \\ 2-n & n-2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)} .$$

Donc $D = (-1)^{n+1}\, n!$

b. Pour calculer Δ, on fait agir sur les colonnes (ou lignes) une "permutation-miroir" $\sigma : (1, 2, \cdots, n-1, n) \mapsto (n, n-1, \cdots, 2, 1)$, qui est le produit des $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ "transpositions" échangeant j et $n-j+1$, avec $1 \leq j \leq \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$. Ainsi, les a se trouvent sur la diagonale prncipale. Ensuite, on peut observer que la somme des éléments de chaque colonne de la matrice est $a+n-1$, ce qui permettra de "sortir" ce facteur $a+n-1$ du déterminant après avoir effectué l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + (L_2 + \cdots + L_n)$. On effctuera ensuite les opérations $C_j \leftarrow C_j - C_1$ $(2 \leq j \leq n)$ pour se ramener à une matrice triangulaire inférieure.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ a & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \begin{vmatrix} a & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & a \end{vmatrix} = (-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & a & & (1) \\ & & \ddots & \\ (1) & & & a \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & & & (0) \\ 1 & a-1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & a-1 \end{vmatrix} = (-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (a+n-1)\,(a-1)^{n-1} .$$

DET 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. À quelle condition la matrice M est-elle inversible ? Donner son inverse si c'est possible.

- -

• Des opérations élémentaires de type "transvection" (qui ne modifient pas le déterminant), effectuées d'abord sur les colonnes, puis sur les lignes, donnent

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} I_n + A & A \\ I_n + A & I_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_n + A & A \\ 0 & I_n - A \end{pmatrix} = \det(I_n + A) \cdot \det(I_n - A) ,$$

puisque l'on se ramène à une matrice triangulaire par blocs. On en déduit que M est inversible **si et seulement si** les matrices $I_n + A$ et $I_n - A$ sont toutes deux inversibles (i.e. **ssi** $\mathrm{Sp}(A) \cap \{-1, 1\} = \emptyset$).

• Si cette condition est satisfaite, on peut envisager différentes méthodes pour inverser M, et ces différentes méthodes ne conduisent pas toujours (en tout cas, pas directement) à la même expression du résultat.

▷ On peut rechercher M^{-1} sous la forme $N = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$, où les quatre blocs sont carrés d'ordre n. Alors

$$MN = I_{2n} \iff \begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} E + AG = I_n & (\mathbf{1}) \\ F + AH = 0 & (\mathbf{2}) \\ AE + G = 0 & (\mathbf{3}) \\ AF + H = I_n & (\mathbf{4}) \end{cases} .$$

Les combinaisons linéaires **(1)+(3)**, **(2)+(4)**, **(1)-(3)**, **(4)-(2)** donnent

$$E + G = F + H = (I_n + A)^{-1} \quad \text{et} \quad E - G = H - F = (I_n - A)^{-1} ,$$

d'où

$$E = H = \frac{1}{2}\Big((I_n + A)^{-1} + (I_n - A)^{-1}\Big) \quad \text{et} \quad G = F = \frac{1}{2}\Big((I_n + A)^{-1} - (I_n - A)^{-1}\Big) .$$

▷ On aurait pu aussi inverser le système $MX = X'$, en posant $X = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} Y' \\ Z' \end{pmatrix}$. Les calculs sont laissés au lecteur (*ouf!*), qui devrait trouver

$$E = H = (I_n - A^2)^{-1} \quad \text{et} \quad F = G = -A(I_n - A^2)^{-1} \ .$$

Le même lecteur, s'il est toujours vivant, vérifiera que c'est en fait la même chose que ce que l'on obtient par la première méthode.