CORRIGÉ du DS de MATHÉMATIQUES numéro 3

PSI2 2024-2025 **le 09/11/2024**

PROBLÈME 1

Les parties I. et II. sont extraites du sujet CCINP 2024, filière PC

I. Existence d'une solution du problème étudié

1. Pour $x > 0$ fixé, on fait un développement limité lorsque n tend vers $+\infty$:

$$u_n(x) = x\left(\frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) - \left(\frac{x}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\ ,$$

ce qui garantit la convergence absolue, donc la convergence, de la série $\sum u_n(x)$.

Commentaire. Par souci d'économie, on a utilisé le "développement limité fort" à l'ordre 1 en zéro de $\ln(1+x)$ qui s'écrit $\ln(1+x) = x+O(x^2)$: cette écriture apporte plus de précision que le DL "classique" $\ln(1+x) = x + o(x)$ sans avoir à nécessiter le calcul d'un coefficient supplémentaire. Un reste en $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ effectivement n'aurait pas permis de conclure.

2. On calcule $u_n'(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n+x}$ et on observe que l'expression

$$u_n'(x) - \frac{x}{n(n+x)} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \qquad (\textit{après réduction})$$

ne dépend pas de x, on la baptise alors ε_n. Enfin,

$$\varepsilon_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) - \frac{1}{n} = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

donc, comme en **1.**, la série $\sum \varepsilon_n$ est absolument convergente, ou encore la suite (ε_n) est sommable.

3. Pour $x \in S = [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left|u_n'(x)\right| \le |\varepsilon_n| + \frac{x}{n(n+x)} \le |\varepsilon_n| + \frac{b}{n(n+a)}\ .$$

La dernière majoration est uniforme, on a donc $\|u_n'\|_{\infty,S} \le |\varepsilon_n| + \dfrac{b}{n(n+a)}$. Comme $\dfrac{b}{n(n+a)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b}{n^2}$, on déduit la convergence de la série $\sum \|u_n'\|_{\infty,S}$, i.e. la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n'$ sur S.

4. Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, il y a convergence simple de la série $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et convergence normale (donc uniforme) de la série $\sum u_n'$ sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la fonction somme Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (*théorème de dérivation des séries de fonctions*), ce qui est la condition **(i)**.

Du théorème de dérivation des séries de fonctions, on déduit aussi que

$$\Phi'(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n\ ,$$

ainsi Φ' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ car somme de fonctions croissantes, et on a la condition **(iii)**.

La condition **(iv)**: $\Phi(1) = 0$ est immédiate.

Enfin, pour tout $x > 0$,

$$\Phi(x+1) - \Phi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(u_n(x+1) - u_n(x)\big) \ .$$

On observe alors un télescopage puisque

$$\begin{aligned} u_n(x+1) - u_n(x) &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) - \ln(x+n+1) + \ln(n) + \ln(x+n) - \ln(n) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{x+n+1}\right) - \ln\left(\frac{n}{x+n}\right) \ . \end{aligned}$$

Finalement,

$$\Phi(x+1) - \Phi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \ln(1) - \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) = \ln(x) \ ,$$

ce qui donne la condition **(ii)**. La fonction Φ vérifie donc les conditions **(C)**.

II. Unicité de la solution du problème étudié

5. Pour tout $x > 0$, on a $\Phi(x+1) - \Phi(x) = g(x+1) - g(x) = \ln(x)$ puisque Φ et g vérifient la condition **(ii)**. Par différence, $h(x+1) - h(x) = \ln(x) - \ln(x) = 0$.

La fonction h étant de classe $\mathcal{C}^1$ comme différence de fonctions $\mathcal{C}^1$, en dérivant la précédente relation, on obtient $h'(x+1) = h'(x)$.

6. Les fonctions Φ' et g' sont croissantes, c'est la condition **(iii)**. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on a donc

$$\Phi'(p) \leq \Phi'(x+p) \leq \Phi'(1+p) \qquad \text{et} \qquad g'(p) \leq g'(x+p) \leq g'(1+p) \ .$$

La deuxième inégalité donne $-g'(1+p) \leq -g'(x+p) \leq -g'(p)$. Par addition d'inégalités de même sens, on déduit

$$\textbf{(*)} \qquad \Phi'(p) - g'(1+p) \leq \Phi'(x+p) - g'(x+p) = h'(x+p) \leq \Phi'(1+p) - g'(p) \ .$$

En dérivant la relation $g(x+1) - g(x) = \ln(x)$, on obtient $g'(x+1) - g'(x) = \dfrac{1}{x}$. Puis

$$\Phi'(p) - g'(1+p) = \big(\Phi'(p) - g'(p)\big) + \big(g'(p) - g'(1+p)\big) = h'(p) - \frac{1}{p} \ .$$

De façon analogue, on a $g'(p) - \Phi'(1+p) = -h'(p) - \dfrac{1}{p}$.

L'encadrement **(*)** s'écrit donc

$$h'(p) - \frac{1}{p} \leq h'(x+p) \leq h'(p) + \frac{1}{p} \ ,$$

soit $\big|h'(x+p) - h'(p)\big| \leq \dfrac{1}{p}$.

7. De **5.**, on déduit que h' est 1-périodique, on a donc $h'(n) = h'(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si $y > 0$ n'est pas entier, en posant $x = y - \lfloor y \rfloor$, alors $x \in]0, 1[$ et $h'(y) = h'(x)$ puis, toujours par périodicité de h',

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \left|h'(y) - h'(1)\right| = \left|h'(x) - h'(1)\right| = \left|h'(x+p) - h'(p)\right| \leq \frac{1}{p} .$$

Cette majoration étant vraie pour tout p, on a finalement $h'(y) = h'(1)$ pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction h' est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

8. Donc la fonction h est affine sur $\mathbb{R}_+^*$, i.e. de la forme $x \mapsto ax + b$. Comme elle est de plus 1-périodique d'après **5.**, elle est donc constante. Enfin, de la condition **(iv)**, on tire $h(1) = \Phi(1) - g(1) = 0$, donc h est nulle, i.e. $g = \Phi$. On a prouvé l'unicité (et l'existence dans la partie I) d'une fonction vérifiant les conditions **(C)**.

III. Expression intégrale.

9. • Soit $x > 0$ fixé. La fonction $f : t \mapsto t^{x-1}\, e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Au voisinage de 0, on a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$, cette dernière fonction étant intégrable en 0 si et seulement si $1 - x < 1$, ce qui est le cas ici. Par le critère des équivalents, on a obtenu l'intégrabilité de f en 0.

Au voisinage de $+\infty$, par croissances comparées, on a

$$t^2 f(t) = t^{x+1}\, e^{-t} \quad \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

donc $f(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, et f est intégrable en $+\infty$.

On en déduit l'existence (la convergence) de l'intégrale $\Gamma(x)$.

10. La fonction $f : t \mapsto t^{x-1}\, e^{-t}$ est continue, positive, intégrable et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, son intégrale $\Gamma(x)$ est donc strictement positive.

11. Par une intégration par parties, pour $x > 0$,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \big[-t^x\, e^{-t}\big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = x\,\Gamma(x) .$$

12. On observe que $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$, puis par une récurrence immédiate à l'aide de la relation obtenue en **Q11.**, on déduit $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

13. On reprend les mêmes méthodes qu'en **Q9.**, mais il faut ici être un peu plus subtil.

• Soit $x > 0$. La fonction $h : t \mapsto t^{x-1}\, \ln(t)^2\, e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Au voisinage de 0, on a $h(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{(\ln t)^2}{t^{1-x}}$. Par croissances compareés des puissances et logarithmes au voisinage de 0, on a

$$t^{1-\frac{x}{2}}\, h(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{\frac{x}{2}}\, (\ln t)^2 \quad \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \quad 0 ,$$

donc $h(t) = o\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}}\right)$, ce qui entraîne l'intégrabilité de h en 0 puisque $1 - \dfrac{x}{2} < 1$.

Au voisinage de $+\infty$, en utilisant par exemple $\ln(t) = o(t)$, on obtient

$$t^2 h(t) = t^{x+1}\ \ln(t)^2\ e^{-t} = o\big(t^{x+3}\ e^{-t}\big)\ ,$$

donc $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 h(t) = 0$ par croissances comparées des puissances et des exponentielles, et h est intégrable en $+\infty$.

On en déduit l'existence (la convergence) de l'intégrale $B(x)$.

• Pour $x > 0$ fixé toujours, soit la fonction $g\ :\ t \mapsto t^{x-1}\ \ln(t)\ e^{-t}$. Elle est continue sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ et on a $g = o(h)$ au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$ (puisque le facteur $\big|\ln(x)\big|$ tend vers $+\infty$ en 0 et en $+\infty$), l'intégrabilité de h sur $\mathbb{R}_+^*$ entraîne alors l'intégrabilité de g par comparaison, donc la convergence de l'intégrale $A(x)$.

14. De **Q11.**, on déduit, pour $x > 0$,

$$\Psi(x+1) - \Psi(x) = \ln\left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}\right) = \ln(x)\ .$$

15. La fonction $\Psi = \ln\circ\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^2$ comme composée et on calcule

$$\Psi' = \frac{\Gamma'}{\Gamma} \qquad \text{et} \qquad \Psi'' = \frac{\Gamma\,\Gamma'' - \Gamma'^2}{\Gamma^2} = \frac{\Gamma\,B - A^2}{\Gamma^2}\ .$$

Or, $A(x)^2 = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ \ln(t)\ e^{-t}\ \mathrm{d}t\right)^2 = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\ v(t)\ \mathrm{d}t\right)^2$ en posant

$$u(t) = t^{\frac{x-1}{2}}\ e^{-\frac{t}{2}} \qquad \text{et} \qquad v(t) = t^{\frac{x-1}{2}}\ \ln(t)\, e^{-\frac{t}{2}}\ ,$$

les fonctions u et v étant de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **Q13.** En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace préhilbertien $L_c^2(\mathbb{R}_+^*)$ des fonctions continues et de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on majore:

$$\left(\int_0^{+\infty} u(t)\ v(t)\ \mathrm{d}t\right)^2 = (u|v)^2 \le \|u\|^2\ \|v\|^2 = \left(\int_0^{+\infty} u(t)^2\ \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} v(t)^2\ \mathrm{d}t\right)\ ,$$

soit $A(x)^2 \le \Gamma(x)\ B(x)$ pour tout $x > 0$. Donc $\Psi'' \ge 0$, ou encore la fonction $\Psi = \ln\circ\Gamma$ est convexe, ou encore Ψ' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

16. La fonction Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (condition **(i)**), sa dérivée est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question **15.** (condition **(iii)**), on a $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ \mathrm{d}t = 1$, donc $\Psi(1) = 0$ (condition **(iv)**), et la question **14.** fournit la condition **(ii)**.

Finalement, la fonction Ψ satisfait les conditions **(C)** sur $\mathbb{R}_+^*$. De l'unicité montrée dans la partie II, on déduit que $\Psi = \Phi$.

IV. Où l'on retrouve la constante d'Euler

17. On a $a_{n+1} - a_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. En utilisant les "DL forts" $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-1} = \dfrac{1}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, on voit qu'il reste $a_{n+1}-a_n=O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Comme la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est à termes positifs convergente, ceci entraîne la convergence absolue, donc la convergence, de la série télescopique $\sum(a_{n+1}-a_n)$. Il en résulte enfin la convergence de la suite (a_n).

18. Toujours de $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n}=O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, on déduit la convergence de la série proposée et on exprime sa somme partielle d'ordre n: par télescopage des logarithmes,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k}\right)=-H_n+\ln(n+1)=-a_n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

donc $S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\gamma$.

19. On repart de l'égalité $\ln\circ\Gamma=\Phi$ qui donne, pour tout $x>0$, en utilisant le calcul fait dans la question précédente:

$$\begin{aligned}\ln\big(\Gamma(x)\big) &= -\ln(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(x\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\\ &= -\ln(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(x\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\right)\\ &= -\ln(x)-\gamma x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

On prendra garde, dans ce calcul, à associer les termes correctement, de façon à ne pas introduire de somme d'une série qui serait divergente!

20. Posons $v_n(x)=\dfrac{x}{n}-\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ pour $x>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

- Les fonctions v_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
- La série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, *toujours car* $v_n(x)=O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ *quand n tend vers* $+\infty$, notons V sa somme ;
- La série de fonctions $\sum v_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $S=[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$: en effet, on a $v_n'(x)=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+x}=\dfrac{x}{n(n+x)}$ donc, pour $x\in S$, $\big|v_n'(x)\big|\leq\dfrac{b}{n(n+a)}$ (suite sommable, indépendante de x).

On en déduit que la fonction somme $V=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $V'=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n'$, puis que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=(\ln\circ\Gamma)'(x)=-\frac{1}{x}-\gamma+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(n+x)}.$$

21. En particulier,

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -1 - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \; .$$

Or, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ car on reconnaît une série télescopique. Par ailleurs, $\Gamma'(1) = A(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\ln(t)\,\mathrm{d}t$. On conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\gamma$.

22. On dérive une deuxième fois: en effet, les fonctions v_n sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, on a vérifié la convergence simple des séries $\sum v_n$ et $\sum v_n'$, il reste à s'assurer de la convergence uniforme sur tout segment de la série $\sum v_n''$. Or, $v_n''(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2}$ donc, si $S = [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a $\|v_n''\|_{\infty,S} = \dfrac{1}{(n+a)^2}$ qui est sommable, il y a donc convergence normale sur S. On en déduit que V est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $V'' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n''$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad (\ln\circ\Gamma)''(x) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma''(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \; .$$

Pour $x = 1$, cela donne

$$(\ln\circ\Gamma)''(1) = \frac{1 \times B(1) - \gamma^2}{1^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 1 = \frac{\pi^2}{6} \; ,$$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\big(\ln(t)\big)^2\,\mathrm{d}t = B(1) = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$.

PROBLÈME 2

extrait d'un sujet Mines-Ponts 2015, filière PSI

I. Exemples et propriétés générales

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On calcule $M^\top J_2 M = \begin{pmatrix} 0 & bc-ad \\ ad-bc & 0 \end{pmatrix} = \det(M)\cdot J_2$.
La matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est donc symplectique si et seulement si son déterminant vaut 1.

2. Posons $A = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix}$ avec $E = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.
On calcule $A^\top J_4 A = A J_4 A = \dfrac{1}{64}\begin{pmatrix} 0_2 & F^2 - E^2 \\ E^2 - F^2 & 0_2 \end{pmatrix} = J_4$ puisque $E^2 - F^2 = 64\, I_2$.
La matrice A est donc symplectique.

3. On vérifie que $J^\top = -J$ et $J^2 = -I_{2n}$, donc J est inversible et $J^{-1} = J^\top = -J$. On en déduit que $J^\top J J = J$ donc J est symplectique.

4. On a $K_\alpha^\top J K_\alpha = J$, calcul immédiat, donc K_α est symplectique.

5. Soient $M \in \mathcal{H}_{2n}$ et $N \in \mathcal{H}_{2n}$. Des relations $M^\top JM = J$ et $N^\top JN = J$, on tire immédiatement

$$(MN)^\top J(MN) = (N^\top M^\top)J(MN) = N^\top(M^\top JM)N = N^\top JN = J\ ,$$

donc $MN \in \mathcal{H}_{2n}$, ainsi l'ensemble $\mathcal{H}_{2n}$ est stable par produit. En revanche, la matrice nulle 0_{2n} n'est pas symplectique, donc $\mathcal{H}_{2n}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

6. De $M^\top JM = J$, on tire $\det(M^\top JM) = \det(J)\ \det(M)^2 = \det(J)$. Comme J est inversible, $\det(J) \neq 0$, on a donc $\det(M)^2 = 1$ donc $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

7. Si M est symplectique, son déterminant est non nul puisqu'il vaut 1 ou -1, donc M est inversible. Puis, partant de $M^\top JM = J$, il suffit de multiplier par $(M^\top)^{-1} = (M^{-1})^\top$ à gauche et par M^{-1} à droite pour obtenir $J = (M^{-1})^\top JM^{-1}$, donc M^{-1} est symplectique.

II. Où l'on voit qu'en fait, le déterminant vaut 1.

8. On effectue gentiment un produit matriciel par blocs:

$$\begin{aligned} M^\top JM = J \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} C^\top A - A^\top C \ = 0_n & \textbf{(1)} \\ C^\top B - A^\top D \ = -I_n & \textbf{(2)} \\ D^\top A - B^\top C \ = I_n & \textbf{(3)} \\ D^\top B - B^\top D \ = 0_n & \textbf{(4)} \end{cases} . \end{aligned}$$

Les équations **(1)** et **(4)** signifient que les matrices $A^\top C$ et $B^\top D$ sont symétriques.

Les équations **(2)** et **(3)** sont équivalentes l'une à l'autre (en transposant), et équivalent aussi à l'équation $A^\top D - C^\top B = I_n$.

9.a. Encore un produit matriciel par blocs!

$$\begin{pmatrix} I_n & E \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & 0_n \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F + EG & EH \\ G & H \end{pmatrix} .$$

En choisissant $G = C$, $H = D$, $E = BD^{-1}$ et $F = A - BD^{-1}C$, on a le résultat recherché.

b. Comme $B^\top D$ est symétrique, on a $B^\top D = D^\top B$, puis $B^\top = D^\top BD^{-1}$, et ensuite $(BD^{-1})^\top = (D^{-1})^\top B^\top = (D^\top)^{-1}D^\top BD^{-1} = BD^{-1}$, donc BD^{-1} est symétrique. Enfin,

$$\begin{aligned} \det(M) \ &= \ \det \begin{pmatrix} I_n & E \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} F & 0_n \\ G & H \end{pmatrix} \ = \ 1 \times \det(F) \times \det(H) \\ &= \ \det(F^\top) \times \det(H) \ = \ \det(F^\top H) \ = \ \det\Big(\big(A^\top - C^\top(BD^{-1})^\top\big)D\Big) \\ &= \ \det\big((A^\top - C^\top BD^{-1})D\big) \ = \ \det(A^\top D - C^\top B) \ = \ \det(I_n) \ = \ 1\ . \end{aligned}$$

10.a. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \in \mathrm{Ker}(B) \ \cap \ \mathrm{Ker}(D)$, soit $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. On a alors $MY = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX \\ DX \end{pmatrix} = 0$. Et M étant inversible, $Y = 0$ donc $X = 0$.

b.i. On a $DV_i = \alpha_i\, BV_i$ puisque $V_i \in \text{Ker}(D - \alpha_i B)$. Comme α_i est non nul, si DV_i était le vecteur nul, on aurait aussi $BV_i = 0$, donc $V_i \in \text{Ker}(B) \cap \text{Ker}(D)$, donc $V_i = 0$ d'après **a.**, ce qui est contradictoire.

ii. On a $DV_i = \alpha_i BV_i$ et $DV_j = \alpha_j BV_j$ donc, en utilisant $B^\top D = (B^\top D)^\top = D^\top B$,

$$(DV_i)^\top (DV_j) = (DV_i)^\top (\alpha_j BV_j) = \alpha_j\ V_i^\top D^\top BV_j = \alpha_j\ V_i^\top B^\top DV_j\ ,$$

mézôssi

$$(DV_i)^\top (DV_j) = (\alpha_i BV_i)^\top DV_j = \alpha_i\ V_i^\top B^\top DV_j\ .$$

En égalant ces deux écritures, compte tenu de $\alpha_i \neq \alpha_j$, on obtient $V_i^\top B^\top DV_j = 0$, puis $(DV_i)^\top DV_j = 0$.

iii. Soient $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \lambda_j DV_j = 0$. On a alors, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$0 = (DV_i)^\top \left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_j DV_j \right) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j (DV_i)^\top DV_j = \lambda_i\ (DV_i)^\top DV_i\ .$$

Or, le vecteur DV_i de $\mathbb{R}^n$ étant non nul, le scalaire $(DV_i)^\top DV_i = \left\|DV_i\right\|_2^2$ est non nul (*il s'agit de la norme euclidienne standard sur* $\mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). Donc $\lambda_i = 0$, et ceci pour tout i, ce qui montre la liberté de la famille $(DV_0, \cdots, DV_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque. La famille $(DV_0, \cdots, DV_n)$ est orthogonale dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, et on sait (même si on ne l'a pas encore revu cette année) qu'une famille orthogonale de vecteurs non nuls est toujours libre.

iv. Ce que l'on vient de montrer est absurde puisqu'une famille de $n + 1$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ne peut être libre. On en conclut qu'il existe au plus n réels α_i non nuls tels que $D - \alpha_i B$ soit non inversible. Il existe donc au moins un réel α (il en existe même une infinité) tel que $D - \alpha B$ soit inversible.

c. Des questions **4.** et **5.**, on déduit que la matrice $K_\alpha M = \begin{pmatrix} A & B \\ C - \alpha A & D - \alpha B \end{pmatrix}$ est symplectique. Comme $D - \alpha B$ est inversible, il résulte de **Q9.** que $\det(K_\alpha M) = 1$, soit $\det(K_\alpha) \times \det(M) = 1$, donc $\det(M) = 1$.