DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 3

PSI2 2024-2025 **le 09/11/2024**

PROBLÈME 1

Dans ce problème, on souhaite montrer qu'il existe une et une seule fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions ci-dessous, que nous appellerons "les conditions **(C)**".

(i): la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$;

(ii): pour tout $x > 0$, on a $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$;

(iii): la fonction f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (ce qui revient à dire que f est convexe) ;

(iv): $f(1) = 0$.

On exprimera alors cette fonction f comme somme d'une série de fonctions et aussi à l'aide d'une intégrale.

Les différentes parties de ce problème sont assez largement indépendantes entre elles.

I. Existence d'une solution du problème étudié

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$u_n(x) = x\,\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) .$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans toute la suite du problème, on posera

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \Phi(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) .$$

2. Montrer qu'il existe une suite réelle $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$, sommable, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n'(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n .$$

3. En déduire que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement sur tout segment $S = [a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

4. Montrer que la fonction Φ vérifie les conditions **(C)**.

II. Unicité de la solution du problème étudié

Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les conditions **(C)**. On pose $h = \Phi - g$, où Φ est la fonction introduite dans la partie précédente. *Les questions* **5.** *et* **6.** *sont indépendantes.*

5. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $h(x+1) = h(x)$ et $h'(x+1) = h'(x)$.

6. Soit $x \in [0, 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer successivement que

$$\Phi'(p) - g'(1+p) \leq h'(x+p) \leq \Phi'(1+p) - g'(p) \qquad \text{et} \qquad \Phi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p} .$$

En déduire que

$$\left|h'(x+p) - h'(p)\right| \leq \frac{1}{p} .$$

7. Déduire des deux questions précédentes que h' est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

8. Conclure que $g = \Phi$.

III. Expression intégrale.

Pour $x > 0$, on considère les intégrales suivantes:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t\ , \quad A(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, \ln(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t\ , \quad B(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, \ln(t)^2\, e^{-t}\, \mathrm{d}t\ .$$

9. Montrer que l'intégrale $\Gamma(x)$ est convergente pour tout réel x strictement positif.

10. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\Gamma(x) > 0$.

11. Prouver la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)\ .$$

12. Calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

13. Montrer la convergence des intégrales $A(x)$ et $B(x)$ pour tout réel x strictement positif.

Pour tout $x > 0$, on pose $\Psi(x) = \ln\big(\Gamma(x)\big)$.

On admettra que la fonction $\Gamma : x \mapsto \Gamma(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \Gamma'(x) = A(x) \qquad \text{et} \qquad \Gamma''(x) = B(x)\ .$$

14. Pour $x > 0$, simplifier l'expression $\Psi(x+1) - \Psi(x)$.

15. Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, en utilisant une inégalité de Cauchy-Schwarz, prouver que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \Psi''(x) \geq 0\ .$$

16. Conclure que $\Psi = \Phi$ (*la fonction Φ a été introduite dans la partie* **I.**).

IV. Où l'on retrouve la constante d'Euler

Dans cette partie, on utilisera les fonctions Φ, Ψ, Γ, A et B introduites dans les parties **I.** et **III.**, et on admettra toujours que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\Gamma' = A$ et $\Gamma'' = B$.

On rappelle enfin que $\Psi = \Phi = \ln \circ \Gamma$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout n entier naturel non nul, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

17. Montrer que la suite de terme général $a_n = H_n - \ln(n)$ admet une limite finie, cette limite sera notée γ par la suite.

18. Exprimer en fonction de γ la somme $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right)$.

19. Prouver, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la relation

$$\ln\big(\Gamma(x)\big) = -\ln(x) - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \right)\ .$$

20. En déduire une expression de $\dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$ comme somme d'une série de fonctions sur $\mathbb{R}_+^*$.

21. Exprimer, à l'aide de la constante d'Euler γ, l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ \ln(t)\ \mathrm{d}t$.

22. Dans cette question, on admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\big(\ln(t)\big)^2 \mathrm{d}t$.

PROBLÈME 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la matrice $J_{2n} = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On pourra la noter simplement J quand il n'y aura pas d'ambiguïté sur le format.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est dite **symplectique** d'ordre $2n$ si elle vérifie la relation

$$M^\top J_{2n}\, M = J_{2n}\ .$$

On notera $\mathcal{H}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques d'ordre $2n$.
On rappelle que la notation $M^\top$ désigne la transposée de la matrice M. On rappelle aussi la relation $(AB)^\top = B^\top A^\top$ si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
On rappelle qu'une matrice carrée M est dite **symétrique** si $M^\top = M$.
Dans le cas d'une écriture par blocs, si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, alors $M^\top = \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix}$.

I. Exemples et propriétés générales

1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Exprimer le produit $M^\top J_2 M$ à l'aide du déterminant de M. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée d'ordre deux soit symplectique.

2. Vérifier que la matrice $A = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{H}_4(\mathbb{R})$.

On conseille d'effectuer des produits matriciels par blocs.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la matrice $J = J_{2n}$ est inversible et déterminer son inverse. Montrer aussi que $J_{2n} \in \mathcal{H}_{2n}(\mathbb{R})$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit α un réel. Vérifier que la matrice $K_\alpha = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix}$ est symplectique.

5. Montrer que l'ensemble $\mathcal{H}_{2n}(\mathbb{R})$ est stable par produit. Cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?

6. Montrer qu'une matrice symplectique a un déterminant égal à 1 ou -1.

7. Montrer que toute matrice symplectique est inversible et que son inverse est encore une matrice symplectique.

II. Où l'on voit qu'en fait, le déterminant vaut toujours 1

8. Soit M une matrice carrée d'ordre $2n$ écrite sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, où A, B, C, D sont des matrices carrées d'ordre n. Montrer que M est symplectique si et seulement si

$$\textbf{(*):} \quad \begin{cases} \text{les matrices } A^\top C \text{ et } B^\top D \text{ sont symétriques} \\ A^\top D - C^\top B = I_n \end{cases}.$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est symplectique, avec A, B, C, D matrices carrées d'ordre n.

9. Dans cette question, on suppose D inversible.

a. Montrer qu'il existe quatre matrices E, F, G, H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$M = \begin{pmatrix} I_n & E \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & 0_n \\ G & H \end{pmatrix}.$$

b. Vérifier que la matrice BD^{-1} est symétrique, puis que

$$\det(M) = \det(A^\top D - C^\top B) = 1 .$$

On rappelle que, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$, alors le réel $X^\top Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est le produit scalaire canonique des vecteurs X et Y, que l'on peut aussi noter $(X|Y)$.

10. Dans cette question, on suppose D non inversible.

a. En utilisant l'inversibilité de M, montrer que $\operatorname{Ker}(B) \cap \operatorname{Ker}(D) = \{0\}$.

b. On veut montrer qu'il existe un réel α tel que la matrice $D - \alpha B$ est inversible.

Supposons pour cela qu'il existe $n+1$ réels distincts et non nuls α_0, α_1, $\cdots$, α_n tels que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, la matrice $D - \alpha_i B$ est non inversible. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, soit V_i un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}(D - \alpha_i B)$.

i. Montrer que $DV_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

ii. Pour i et j distincts dans $[\![0, n]\!]$, montrer que $(DV_i)^\top DV_j = 0$. *On rappelle que la matrice $B^\top D$ est symétrique.*

iii. Montrer alors que la famille $(DV_0, \cdots, DV_n)$ est libre.

iv. Conclure.

c. Soit donc α un réel tel que $D - \alpha B$ est inversible. En utilisant la matrice K_α introduite dans la question **4.**, montrer que l'on a encore $\det(M) = 1$.