

DS de MATHÉMATIQUES numéro 3 COMMENTAIRES
PSI2 2024-2025

PROBLÈME 1

Sujet d'analyse dont les deux premières parties sont extraites du sujet CCINP 2024 de la filière PC, la suite est de l'analyse classique autour de la fonction Γ dite aussi **intégrale eulérienne**. Les théorèmes de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre n'ayant pas encore été étudiés, certains résultats sont admis par l'énoncé.

1. Il y a encore beaucoup d'erreurs sur le maniement du calcul asymptotique (développements limités, équivalents,...). Je rappelle qu'**il est illicite d'ajouter ou de soustraire des équivalents!** Pour obtenir un équivalent d'une somme ou d'une différence, on passera donc par des développements limités ou asymptotiques (écriture avec un signe = et non \sim , **et un reste!**).

Une chose qui semble mal comprise est le fait qu'un équivalent ne renseigne que sur **le terme prépondérant** dans un développement limité. Par exemple, vous savez tous que $e^x = 1 + x + o(x)$ au voisinage de zéro (DL à l'ordre 1). Il n'est pas faux d'écrire que $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$ mais cette écriture est moins précise (perte d'information) que la précédente car il serait tout aussi exact d'écrire que $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$, voire même que $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + 3x$ puisque ces expressions sont toutes équivalentes entre elles au voisinage de 0.

2. Attention à l'ordre des quantificateurs! On ne demande pas de démontrer que, pour tout x , il existe une suite (ε_n) telle que..., mais plutôt de montrer qu'il existe une suite (ε_n) telle que, pour tout x , ... Ce n'est pas la même chose! Cela veut dire que l'expression de ε_n ne doit pas dépendre de la variable x . Il fallait donc expliciter ε_n (*facile!*) et mentionner l'indépendance par rapport à x . **En mathématiques, et il me semble dans toutes les disciplines scientifiques, il est essentiel de se demander qu'est-ce qui dépend de quoi ?**
3. Une étude plus fine (non demandée) montre que $u'_n(x)$ n'est pas de signe constant. Pour montrer la convergence normale de la série de fonctions $\sum u'_n$, l'expression à majorer ("uniformément") est donc $|u'_n(x)|$, et non simplement $u'_n(x)$. Pour cela, l'inégalité triangulaire classique (avec les valeurs absolues dans \mathbb{R}) est à utiliser.
4. Il y a un petit calcul à bien organiser (reconnaître une série télescopique) pour montrer que Φ vérifie la condition (ii).
7. Question dont la rédaction est délicate, rarement traitée correctement.
9. L'étude en la borne 0 a souvent été oubliée. Certains m'écrivent même "il n'y a pas de problème en 0". Pourtant si! Lorsque $0 < x < 1$, l'intégrande tend vers $+\infty$ en cette borne.
10. J'ai l'impression que beaucoup d'entre vous ne voient pas vraiment de différence entre une inégalité large et une inégalité stricte! Il s'agissait ici d'utiliser le "théorème de stricte positivité" et, pour cela, vous devez mentionner la **continuité** de l'intégrande.
11. L'étude en 0 demandait un peu de finesse. L'étude en $+\infty$ résulte bien sûr de résultats de croissances comparées au programme, mais peut-être pas directement. Il aurait été bien de s'y ramener en commençant par dire qu'au voisinage de $+\infty$, on a $0 \leq \ln(t) \leq t$ par exemple, ou alors $\ln(t) = o(t)$.
17. Quelques réponses fausses, même si cette question a été l'objet d'une question de cours dans les programmes de colles! Par exemple, il ne suffit pas de montrer que $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ par une comparaison série-intégrale. Ceci ne donne en effet que $H_n = \ln(n) + o(\ln(n))$, et non $H_n = \ln(n) + o(1)$, qui est un résultat plus précis.

18. et 19. Quelques manipulations sans grande difficulté. Il faut toutefois prendre garde à ne pas écrire de sommes de séries divergentes!

20. et 22. Encore des dérivations terme à terme... à justifier donc!

PROBLÈME 2

Ce sujet est extrait d'un sujet Mines-Ponts (PSI 2015), mais la première partie restait très élémentaire.

1. Question très facile... mais parfois mal lue semble-t-il! Savez-vous ce qu'est une matrice carrée d'ordre deux ???
8. On demande une **condition nécessaire et suffisante** ("si et seulement si"), la rédaction doit donc être soignée. L'égalisation des blocs dans le produit matriciel conduit à quatre conditions, pourquoi diable n'en reste-t-il que trois dans l'énoncé ? Cela eût mérité une explication.
9. Dans certaines copies, on se limite à écrire des équations sans vraiment les résoudre! Ici, il faut expliciter E , F , G , H en fonction de A , B , C , D .
10. Un résultat classique dans un cours sur les espaces préhilbertiens est "toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre", il s'agit ici d'une variante de ce résultat (les méthodes de démonstration sont les mêmes).