Semaine 8 : du 18/11 au 22/11

Réduction des endomorphismes

Notions de valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre pour un endomorphisme ou une matrice carrée. Un vecteur non nul est vecteur propre de u si et seulement s'il engendre une droite vectorielle stable par u. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, un scalaire λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ est non injectif.

En dimension finie, notion de spectre. Si E est **de dimension finie**, alors

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff u - \lambda\,\mathrm{id}_E \notin \mathrm{GL}(E) \iff \det(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = 0\ .$$

Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Lien entre polynômes annulateurs et valeurs propres.

Les sous-espaces propres sont en somme directe. Conséquences: en dimension finie n, $\mathrm{Card}\big(\mathrm{Sp}(u)\big) \leq n$ et $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\big(E_\lambda(u)\big) \leq n$. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée: définition et propriétés, écriture développée $\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)\,X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\,\det(A)$. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie.

Les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme caractéristique. Conséquences.

Notion de multiplicité d'une valeur propre. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit sur un sous-espace stable. Inégalité $1 \leq \dim\big(E_\lambda(u)\big) \leq m_\lambda$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

Expression du déterminant et de la trace à l'aide des valeurs propres lorsque χ_A est scindé.

Notion d'endomorphisme (ou de matrice) diagonalisable. Diagonalisation effective $A = PDP^{-1}$, interprétation des matrices P et D.

Condition suffisante de diagonalisablilité: si un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admet n valeurs propres distinctes, alors il est diagonalisable.

Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisablilité:

$$u \in \mathcal{L}(E) \text{ est diagonalisable } \underline{\textbf{ssi}} \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E \quad \underline{\textbf{ssi}} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\big(E_\lambda(u)\big) = \dim(E).$$

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $n+1$ scalaires distincts, ils forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe. Conséquences.
- Lien entre polynômes annulateurs et valeurs propres.
- Existence de valeurs propres pour $u \in \mathcal{L}(E)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E de dimension impaire.
- Inégalité $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \quad 1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$.
- u est diagonalisable $\displaystyle\iff \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E \iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim(E)$.