CORRIGÉ du D.M. de MATHÉMATIQUES numéro 3
PSI2 2024-2025

PARTIE A

A.1.a. Le vecteur-colonne $V = AU$ a pour i-ème élément $v_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}u_j = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$ $(1 \leq i \leq p)$.

L'équivalence demandée en résulte aussitôt.

b. Si A et B sont deux matrices stochastiques, alors tous les coefficients de la matrice produit $C = AB$ sont positifs ou nuls puisque $c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,k}$; d'autre part, de $AU = U$ et $BU = U$, on déduit $ABU = AU = U$ (condition **(ii)**). L'ensemble $\mathcal{S}_p$ est donc stable par produit.

Si A et B sont strictement stochastiques, alors AB est stochastique d'après ce qui précède et, pour tout $(i,k) \in [\![1,p]\!]^2$, le coefficient $c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,k}$ est une somme de réels strictement positifs, donc est strictement positif. L'ensemble $\mathcal{S}_p^*$ est donc stable par produit.

A.2.a. D'après **A.1.a.**, le nombre 1 est valeur propre de A, et U est un vecteur propre associé.

b. Par récurrence immédiate sur n puisque $\mathcal{S}_p$ est stable par produit (et $A^0 = I_p$ est bien stochastique).

c. Les matrices A^n sont toutes stochastiques, on a donc $0 \leq a_{i,j}^{(n)} \leq 1$ et $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}^{(n)} = 1$ pour tout n ; en passant à la limite (en notant $b_{i,j} = \lim_{n\to+\infty} a_{i,j}^{(n)}$), on a $0 \leq b_{i,j} \leq 1$ et $\sum_{j=1}^{p} b_{i,j} = 1$, donc B est stochastique. *Remarque pour les 5/2 : on a ainsi montré que l'ensemble $\mathcal{S}_p$ est fermé (par caractérisation séquentielle) dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Il est vrai qu'aucune norme n'a été ici introduite, mais l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et définissent donc la même topologie.*

Soit n un entier naturel fixé ; par combinaisons linéaires de suites réelles convergentes, on voit que le coefficient d'indices (i,k) de la matrice produit A^nB est

$$\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}^{(n)}b_{j,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}^{(n)}\big(\lim_{m\to+\infty} a_{j,k}^{(m)}\big) = \lim_{m\to+\infty}\Big(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}^{(n)}a_{j,k}^{(m)}\Big) = \lim_{m\to+\infty} a_{i,k}^{(m+n)} = b_{i,k}\ ,$$

ce qui montre que $A^nB = B$. De façon analogue, $BA^n = B$. *Remarque pour les 5/2 : cette propriété se déduit aussi de la continuité du produit matriciel, c'est-à-dire de l'application $\Phi : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $(M,N) \mapsto MN$ qui est bilinéaire entre des espaces vectoriels de dimension finie donc continue. Ainsi,*

$$A^nB = A^n\big(\lim_{m\to+\infty} A^m\big) = \lim_{m\to+\infty} A^nA^m = \lim_{m\to+\infty} A^{n+m} = B\ .$$

Le coefficient d'indices (i,k) de la matrice B^2 est

$$\sum_{j=1}^{p} b_{i,j}b_{j,k} = \sum_{j=1}^{p} b_{i,j}\big(\lim_{n\to+\infty} a_{j,k}^{(n)}\big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{j=1}^{p} b_{i,j}a_{j,k}^{(n)}\Big) = \lim_{n\to+\infty} b_{i,k} = b_{i,k}$$

(en utilisant $BA^n = B$). Ainsi, $B^2 = B$ et B est une matrice de projecteur. *Remarque pour les 5/2 : ici aussi, par continuité du produit matriciel,*

$$B^2 = B\big(\lim_{n\to+\infty} A^n\big) = \lim_{n\to+\infty}(BA^n) = \lim_{n\to+\infty} B = B\ .$$

A.3. On a $y_k = \sum_{j=1}^{p} a_{k,j}x_j$. Si l'on avait $y_k = 0$, en isolant le terme d'indice k, on écrirait $a_{k,k}x_k = -\sum_{j\neq k} a_{k,j}x_j$ et, en prenant le module,

$$|a_{k,k}|\,|x_k| = \Big|\sum_{j\neq k} a_{k,j}x_j\Big| \leq \sum_{j\neq k} |a_{k,j}|\,|x_j| \leq \Big(\sum_{j\neq k} |a_{k,j}|\Big)\,|x_k| < |a_{k,k}|\,|x_k|$$

puisque $|x_k|$ est strictement positif et que l'on a l'inégalité stricte $\sum_{j\neq k} |a_{k,j}| < |a_{k,k}|$, on a donc obtenu une contradiction. Donc $y_k \neq 0$.

On a ainsi prouvé que $X \neq 0 \Longrightarrow AX \neq 0$ soit, par contraposition, que $AX = 0 \Longrightarrow X = 0$, c'est-à-dire $\operatorname{Ker} A = \{0\}$: **toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible** (théorème d'Hadamard).

A.4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe tel que $|\lambda| > 1$, il faut montrer que $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$ c'est-à-dire que la matrice $A - \lambda I_p$ est inversible. Or, cette matrice est à diagonale strictement dominante puisque, la matrice A étant stochastique, on a pour tout $i \in [\![1, p]\!]$,

$$|a_{i,i} - \lambda| \geq \big||a_{i,i}| - |\lambda|\big| = |\lambda| - a_{i,i} > 1 - a_{i,i} = \sum_{j\neq i} a_{i,j} = \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\ .$$

Les valeurs propres (complexes) de A sont donc toutes de module inférieur ou égal à 1.

Démonstration plus directe. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et si $X = (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{C}^p$ est un vecteur propre associé, alors $\lambda x_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et, si l'on choisit un indice $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $|x_k| = \|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq p} |x_i|$, alors

$$|\lambda|\,|x_k| = |\lambda\, x_k| = \Big|\sum_{j=1}^{p} a_{k,j}x_j\Big| \leq \sum_{j=1}^{k} |a_{k,j}x_j| \leq \Big(\sum_{j=1}^{k} a_{k,j}\Big)\,|x_k| = |x_k|\ ,$$

donc $|\lambda| \leq 1$ puisque $|x_k|$ est strictement positif.

PARTIE B

B.1. Il s'agit de montrer que, pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, on a $|n_{i,i}| > \sum_{\substack{1\leq j\leq p-1\\ j\neq i}} |n_{i,j}|$, soit $|a_{i,i} - 1| > \sum_{\substack{1\leq j\leq p-1\\ j\neq i}} |a_{i,j}|$. Or,

$$|a_{i,i} - 1| = 1 - a_{i,i} = \sum_{\substack{1\leq j\leq p\\ j\neq i}} a_{i,j} = \sum_{\substack{1\leq j\leq p-1\\ j\neq i}} a_{i,j} + a_{i,p} > \sum_{\substack{1\leq j\leq p-1\\ j\neq i}} a_{i,j} = \sum_{\substack{1\leq j\leq p-1\\ j\neq i}} |a_{i,j}|$$

puisque $a_{i,p}$ est strictement positif.

B.2. La matrice N est donc inversible. Les $p-1$ premières colonnes de la matrice $M = A - I_p$ sont donc linéairement indépendantes (une relation de dépendance linéaire entre ces colonnes donnerait immédiatement une relation de dépendance linéaire entre les colonnes de la matrice extraite N, ce qui est impossible). Donc $\mathrm{rg}(A - I_p) \geq p - 1$, mais $\mathrm{rg}(A - I_p) < p$ puisqu'on sait que 1 est valeur propre de A. Finalement, $\mathrm{rg}(A - I_p) = p - 1$, ce qui signifie que le sous-espace propre $E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_p)$ est de dimension 1, donc $E_1(A) = \mathrm{Vect}(U)$.

B.3. Si z et u sont deux nombres complexes non nuls, on a $|z - u| \geq \big||z| - |u|\big|$ (*c'est le côté obscûûûr de l'inégalité triangulaire!*), l'égalité étant réalisée si et seulement si z et u sont “colinéaires et de même sens”, c'est-à-dire s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u = \alpha z$.

Ainsi, si λ est un nombre complexe de module 1, mais différent de 1, on a, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ (puisque $a_{i,i}$ est un réel strictement positif et que λ n'en est pas un) :

$$|a_{i,i} - \lambda| > \big||a_{i,i}| - |\lambda|\big| = |a_{i,i} - 1| = 1 - a_{i,i} = \sum_{j \neq i} a_{i,j} = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \; .$$

La matrice $A - \lambda I_p$ est à diagonale strictement dominante, donc est inversible, et λ n'est pas valeur propre de A. On sait par ailleurs que, si $|\lambda| > 1$, alors λ n'est pas valeur propre de A (question **A.4.**), ce qui répond complètement à la question.

PARTIE C

Remarque. • *Pour $a = b = 1$, on a $A = I_2$ et la suite (A^n) est constante, donc converge : $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n = I_2$.*

• *Pour $a = b = 0$, on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; on vérifie que $A^2 = I_2$, donc $A^{2k} = I_2$ et $A^{2k+1} = A \neq I_2$, la suite (A^n) ne converge pas.*

Désormais, on suppose le couple (a, b) différent de $(0, 0)$ et de $(1, 1)$ (*la matrice A n'est donc pas toujours strictement stochastique, lorsque $(a, b) = (1, 0)$ ou $(0, 1)$*).

a. On calcule

$$P(A) = \big(A - I_2\big)\,\big(A - (a + b - 1)I_2\big) = \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ 1-b & b-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-b & 1-a \\ 1-b & 1-a \end{pmatrix} = 0_2 \; .$$

Ainsi, P est un polynôme annulateur de la matrice A.

b. Remarquons que $a + b - 1 \neq 1$, autrement dit $a + b - 2 \neq 0$ puisque $a \leq 1$, $b \leq 1$ et $(a, b) \neq (1, 1)$. On écrit $X^n = \big(X - 1\big)\big(X - (a+b-1)\big)\,Q(X) + \alpha X + \beta$ puisqu'on sait que le reste R de cette division euclidienne est de degré au plus égal à 1. En évaluant pour $X = 1$ et $X = a + b - 1$, on obtient le système linéaire $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ (a+b-1)\alpha + \beta = (a+b-1)^n \end{cases}$, d'où les valeurs de α et β et le reste

$$R(X) = \frac{(a+b-1)^n - 1}{a+b-2}\, X + \frac{a+b-1-(a+b-1)^n}{a+b-2} \; .$$

c. L'application $\mathbb{R}[X] \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $F \mapsto F(A)$ est linéaire et conserve le produit (*c'est un “morphisme d'algèbres”, vocabulaire hors programme*), ce qui permet de substituer la matrice A à l'indéterminée X dans l'identité polynomiale $X^n = PQ + R$. Comme $P(A) = 0_2$, on obtient ainsi

$$A^n = R(A) = \alpha A + \beta I_2 = \frac{1}{a+b-2}\begin{pmatrix} (a-1)(a+b-1)^n + b - 1 & (1-a)(a+b-1)^n + a - 1 \\ (1-b)(a+b-1)^n + b - 1 & (b-1)(a+b-1)^n + a - 1 \end{pmatrix} .$$

d. On a $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$ et $(a,b) \neq (0,0)$, $(a,b) \neq (1,1)$ donc $0 < a+b < 2$ (inégalités strictes), donc $|a+b-1| < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (a+b-1)^n = 0$ (*suite géométrique*). On voit ainsi que la suite (A^n) converge vers la matrice B, avec

$$B = \lim_{n\to+\infty} A^n = \frac{1}{a+b-2}\begin{pmatrix} b-1 & a-1 \\ b-1 & a-1 \end{pmatrix} .$$

PARTIE D

D.1. On a $\varepsilon > 0$ puisque tous les coefficients de la matrice sont strictement positifs ; si on avait $\varepsilon \geq \dfrac{1}{2}$, alors la somme des éléments d'une ligne serait au moins égale à $\dfrac{3}{2}$, or elle est censée valoir 1.

D.2. On a $a_{i,j}^{(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\, a_{k,j}^{(n)}$ puisque $A^{n+1} = A\, A^n$.

D.3. Il existe un indice $k_0 \in [\![1,p]\!]$ tel que $a_{k_0,j}^{(n)} = \max\limits_{1\leq k\leq p} a_{k,j}^{(n)} = \beta_j^{(n)}$. Dans l'expression de $a_{i,j}^{(n+1)}$ donnée ci-dessus, isolons le terme pour $k = k_0$ et minorons $a_{k,j}^{(n)}$ par $\alpha_j^{(n)}$ dans les autres termes. Cela donne

$$a_{i,j}^{(n+1)} = a_{i,k_0}\, \beta_j^{(n)} + \sum_{k\neq k_0} a_{i,k}\, a_{k,j}^{(n)} \geq a_{i,k_0}\, \beta_j^{(n)} + \alpha_j^{(n)} \left(\sum_{k\neq k_0} a_{i,k} \right) = a_{i,k_0}\, \beta_j^{(n)} + (1 - a_{i,k_0})\, \alpha_j^{(n)} ,$$

c'est-à-dire

$$a_{i,j}^{(n+1)} \geq \alpha_j^{(n)} + a_{i,k_0} \left(\beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)}\right) = \alpha_j^{(n)} + a_{i,k_0}\, \gamma_j^{(n)} \geq \alpha_j^{(n)} + \varepsilon\, \gamma_j^{(n)} ,$$

ce qui est bien la première inégalité demandée.

De même, en utilisant un indice $k_1 \in [\![1,p]\!]$ tel que $a_{k_1,j}^{(n)} = \min\limits_{1\leq k\leq p} a_{k,j}^{(n)} = \alpha_j^{(n)}$, on a la majoration

$$a_{i,j}^{(n+1)} = a_{i,k_1}\, \alpha_j^{(n)} + \sum_{k\neq k_1} a_{i,k}\, a_{k,j}^{(n)} \leq a_{i,k_1}\, \alpha_j^{(n)} + \beta_j^{(n)} \left(\sum_{k\neq k_1} a_{i,k} \right) = a_{i,k_1}\, \alpha_j^{(n)} + (1 - a_{i,k_1})\, \beta_j^{(n)} ,$$

c'est-à-dire

$$a_{i,j}^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n)} + a_{i,k_1} \left(\alpha_j^{(n)} - \beta_j^{(n)}\right) = \beta_j^{(n)} - a_{i,k_1}\, \gamma_j^{(n)} \leq \beta_j^{(n)} - \varepsilon\, \gamma_j^{(n)} ,$$

ce qui donne la deuxième inégalité désirée.

D.4. Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on a $a_{i,j}^{(n+1)} \geq \alpha_j^{(n)} + \varepsilon\gamma_j^{(n)} \geq \alpha_j^{(n)}$; cette inégalité vraie pour tout i reste vraie pour le minimum, à savoir $\alpha_j^{(n+1)} \geq \alpha_j^{(n)}$.

On a, de la même façon, $a_{i,j}^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n)} - \varepsilon\gamma_j^{(n)} \leq \beta_j^{(n)}$ pour tout i, d'où $\beta_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n)}$.

Enfin, $\alpha_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n+1)}$ résulte de la définition même, donc $\alpha_j^{(n)} \leq \alpha_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n)}$.

Par ailleurs, l'encadrement $\alpha_j^{(n)} + \varepsilon\,\gamma_j^{(n)} \leq a_{ij}^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n)} - \varepsilon\,\gamma_j^{(n)}$, vrai pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, montre que l'on a $\alpha_j^{(n+1)} \geq \alpha_j^{(n)} + \varepsilon\,\gamma_j^{(n)}$ et $\beta_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n)} - \varepsilon\,\gamma_j^{(n)}$. De ces deux inégalités, on tire

$$\gamma_j^{(n+1)} = \beta_j^{(n+1)} - \alpha_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)} - 2\varepsilon\,\gamma_j^{(n)} = (1-2\varepsilon)\,\gamma_j^{(n)} .$$

D.5. Il résulte de la question précédente que, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, les suites $\left(\alpha_j^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\beta_j^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes : en effet, la première est croissante, la deuxième décroissante, et leur différence $\gamma_j^{(n)}$ vérifie $0 \leq \gamma_j^{(n)} \leq (1-2\varepsilon)^n\,\gamma_j^{(0)}$ avec $0 < 1-2\varepsilon < 1$, donc tend vers zéro. Posons alors $\lambda_j = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_j^{(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_j^{(n)}$. Comme on a, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, l'encadrement $\alpha_j^{(n)} \leq a_{ij}^{(n)} \leq \beta_j^{(n)}$, le théorème d'encadrement permet d'affirmer que, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{ij}^{(n)} = \lambda_j$. La suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers la matrice $B = (b_{i,j})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \qquad b_{i,j} = \lambda_j$.

D.6. On constate que chaque ligne de la matrice B contient les mêmes coefficients $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$.

D.7. Remarquons que, si une matrice M quelconque de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est constituée des vecteurs-lignes $L_1, \cdots, L_p$ (appartenant à $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$) et si N est une autre matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, alors la matrice produit MN est constituée des vecteurs lignes $L_1N, \cdots, L_pN$.

Ici, on a la relation $BA = B$ (*cf.* question **A.2.c.**), la matrice B étant constituée de p fois la ligne L. La matrice produit BA est alors constituée de p fois la ligne LA, mais de $BA = B$, on déduit $LA = L$. En transposant cette égalité matricielle, on a $A^\top L^\top = L^\top$, soit $A^\top X = X$: le vecteur-colonne $X = L^\top$ est non nul (la somme de ses coefficients vaut 1 puisque B est stochastique d'après **A.2.c.**), il est donc vecteur propre de $A^\top$ pour la valeur propre 1.

Variante: Le fait que les p lignes de B soient L se traduit aussi par la relation $B = UL$. La relation $BA = B$ devient alors $ULA = UL$. On multiplie maintenant à gauche par le vecteur-ligne $U^\top$, cela donne $U^\top ULA = U^\top UL$. Mais $U^\top U = \|U\|_2^2 = n$ est un scalaire (non nul), on a donc $nLA = nL$, donc $LA = L$, puis $A^\top L^\top = L^\top$.

D.8. On sait que la suite (A^n) converge vers une matrice B dont toutes lignes sont égales à une certaine ligne $L \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ ayant les particularités suivantes :

- la somme des coefficients de L vaut 1 ;

- le vecteur-colonne $X = L^\top$ vérifie $A^\top X = X$.

Le système $A^\top X = X$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ s'écrit $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\dfrac{3}{4}\ x & + & \dfrac{1}{3}\ y & + & \dfrac{1}{5}\ z & = & 0 \\ \dfrac{1}{2}\ x & - & \dfrac{2}{3}\ y & + & \dfrac{1}{5}\ z & = & 0 \\ \dfrac{1}{4}\ x & + & \dfrac{1}{3}\ y & - & \dfrac{2}{5}\ z & = & 0 \end{array}\right.$ et a pour solutions $(x,y,z) = (12\alpha, 15\alpha, 20\alpha)$ avec α réel. Il y a une seule valeur de α pour que la somme des coefficients soit égale à 1, c'est $\alpha = \dfrac{1}{47}$. Finalement, $L = \dfrac{1}{47}\begin{pmatrix} 12 & 15 & 20 \end{pmatrix}$ et

$$B = \lim_{n \to +\infty} A^n = UL = \frac{1}{47}\begin{pmatrix} 12 & 15 & 20 \\ 12 & 15 & 20 \\ 12 & 15 & 20 \end{pmatrix}.$$