Rayon de convergence.

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$, avec

a. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$; **b.** $a_n = n^{(-1)^n}$; **c.** $a_n = \dbinom{2n}{n}$; **d.** $a_n = \lfloor 10^n \pi \rfloor - 10 \times \lfloor 10^{n-1}\pi \rfloor$

(dans le **d.**, le coefficient a_n est la n-ième décimale du nombre π).

2. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$.

a. Soit P un polynôme non nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} P(n)\, a_n\, z^n$.

b. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^2 z^n$.

3. Soit une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence non nul. Montrer que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{a_n\, z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

4. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
On pose $b_n = \dfrac{a_n}{1+|a_n|}$. Soit R' le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$.

a. Montrer que $R' \geq \max\{1, R\}$.

b. Lorsque $R' > 1$, montrer que $R' = R$.

c. En déduire que $R' = \max\{1, R\}$.

5.a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les inégalités $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq n^n$.

b. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} n! a_n z^n$ ait un rayon de convergence non nul est que $\sqrt[n]{|a_n|} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Expression de la somme d'une série entière.

6. On pose $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{3^n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et calculer sa somme.

7. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(2k)!}$.

a. Montrer que la suite (a_n) converge et donner sa limite.

b. Rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, x^n$?

c. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Calculer $(1-x)\, f(x)$. En déduire l'expression de $f(x)$.

8. Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n-1)}$.

9. Rayon de convergence et calcul de $\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} x^n$ (*on cherchera une équation différentielle vérifiée par la fonction somme de cette série*).

10. Une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 1 \quad ; \quad \forall n \geq 2 \quad u_n = -u_{n-1} + 2\,u_{n-2} + 3^n \ .$$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq u_n \leq 3^{n+1}$.

b. Rayon de convergence et calcul de la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} u_n x^n$.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} R_n x^n$.

12. Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre de couples $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $p + 5q = n$. Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Donner une expression de a_n en fonction de n en utilisant une partie entière.

13. Soit $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

a. Ensemble de définition de f ?

b. Exprimer $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles sur $]-1,1[$.

c. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

Propriétés de la fonction somme.

14. On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ pour tout réel x tel que la série converge.

a. Quel est l'ensemble de définition de f ?

b. Montrer que f est continue sur $[-1,1[$.

c. Quelle est la limite de f en 1^- ?

15. On admet $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donner un équivalent, lorsque $x \to 1^-$, de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$.

16. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, non nulle, et N-périodique avec $N \in \mathbb{N}^*$.

a. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$?

b. Montrer que la fonction somme de cette série entière est une fonction rationnelle.

Développement en série entière.

17. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout n, on peut écrire, sur $\mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$, où P_n est une fonction polynomiale.

b. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier naturel n.

c. La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de zéro ?

18. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2^n x)}{n!}$.

a. Montrer que f est définie, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que sa série de Taylor en 0 a un rayon de convergence nul.

19. Développer en série entière $f(x) = \ln\sqrt{1 - 2x\ \mathrm{ch}\, a + x^2}$, avec $a > 0$ fixé.

20. Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto f(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^3$.

21. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x\ \mathrm{ch}\, x$.

a. Écrire la fonction f comme combinaison linéaire de quatre fonctions de la forme $x \mapsto e^{mx}$, où m est un coefficient complexe.

b. En déduire que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et expliciter son développement en série entière.

c*. Retrouver ce développement en utilisant un produit de Cauchy.

Autres exercices.

22. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M\ .$$

Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

23. Rechercher les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$(\mathbf{E})\ : \qquad 4x\, y'' + 2\, y' - y = 0\ .$$

24*. Soit λ un réel tel que $|\lambda| < 1$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(\lambda x)\ .$$

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

25. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $|z| < R$.

a. Soit r tel que $0 < r < R$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N} \quad a_p r^p = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})\, e^{-ipt}\, \mathrm{d}t$.

En déduire que $|a_p| \leq \dfrac{M(r)}{r^p}$, où $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

b. *Application.* Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. On suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

26*. On veut montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ admet un développement en série entière au voisinage de 0. On raisonne par analyse-synthèse : supposons que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{2n}$ sur $]-R, R[$. Quelles relations doivent vérifier les coefficients a_n ? Préciser a_0, a_1 et a_2. Montrer que $|a_n| \leq 1$ pour tout n. Que peut-on en déduire sur le rayon de convergence ?

27. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1, les coefficients a_n étant des réels positifs. On pose $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-1, 1[$. On suppose que la fonction s est bornée sur $[0, 1[$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente, et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim\limits_{x \to 1^-} s(x)$.

28. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de sommes respectives $f(x)$ et $g(x)$, avec $b_n > 0$ pour tout n. On suppose que le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ est $R \in \mathbb{R}_+^*$ et que cette série diverge pour $x = R$.

a. On suppose $a_n = o(b_n)$. Montrer que $f(x) = o\big(g(x)\big)$ lorsque $x \to R^-$.

b. On suppose $a_n \sim b_n$. Montrer que $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \to R^-$.

29. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

30. Soit $\sum_{n=0} a_n x^n$ le développement en série entière de $\sqrt{1+x}$ pour $x \in]-1, 1[$. Pour n entier naturel, on considère le polynôme $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

a. Montrer que le polynôme $T_n = S_n^2 - 1 - X$ est divisible par X^{n+1}.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre d, supposée nilpotente ($A^p = 0$). Montrer que la matrice $I_d + A$ admet une "racine carrée".

31. Démontrer la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$ pour n entier naturel.

Exercices avec Python.

32. Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^3)(1-x^5)}$.

a. Montrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

b. On note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ ce développement en série entière. Écrire une fonction en langage Python qui calcule c_n, prenant n comme argument. Calculer c_n pour $n \in [\![0,199]\!]$.

c. Avec Python, comparer c_n et c_{n+15} pour $n \in [\![0,184]\!]$.

d. Pour tout n entier naturel, on pose $D_n = \big\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid 3p+5q = n\big\}$, et $d_n = \mathrm{Card}(D_n)$. Écrire une fonction Python prenant comme argument un entier naturel n et retournant la liste des éléments de l'ensemble D_n.

e. Vérifier expérimentalement la relation $c_n = d_n$, puis la démontrer.

f. Prouver alors la relation liant c_n et c_{n+15}.

g. Représenter sur un même graphique, sur l'intervalle $[0\,;\,0,95]$, la fonction f et la somme partielle d'indice 20 de la série entière $\sum c_n x^n$.

33. La suite de Fibonacci (a_n) est définie par

$$a_0 = 0 \quad ; \quad a_1 = 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ .$$

a. Écrire une fonction retournant a_n, prenant n comme argument.

b. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout x tel que cette série entière converge. Représenter la somme partielle d'indice 20 de cette série entière dans l'intervalle $[0\,;\,0,6]$.

c. Montrer que, pour tout $x \in]-R,R[$, où R est le rayon de convergence, on a $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$.

d. Représenter sur le même graphique la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1-x-x^2}$ sur l'intervalle $[0\,;\,0,6]$.

UN PROBLÈME

PARTIE A

Soit h une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $[0,a[$ (avec $a > 0$) et vérifiant

$$\forall x \in [0,a[\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad h^{(n)}(x) \geq 0 \ .$$

Pour $x \in [0,a[$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n(x) = h(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

A.1. Prouver la relation $R_n(x) = x^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n \, h^{(n+1)}(xu)}{n!} \, \mathrm{d}u$.

A.2. Pour tout couple (x,y) tel que $0 < x < y < a$ et tout entier naturel n, montrer que

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} h(y) \ .$$

A.3. En déduire que h est la somme de sa série de Taylor sur $[0,a[$.

PARTIE B

Soit g l'application définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan x$.

B.1.a. Prouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence et l'unicité d'un polynôme P_n, dont on donnera le degré, tel que

$$\forall x \in I \qquad g^{(n)}(x) = P_n(\tan x)\ .$$

b. Montrer que les coefficients de P_n sont des entiers naturels.

B.2. On note $a_n = g^{(2n+1)}(0)$. On s'intéresse à la série de Taylor de la fonction g, c'est-à-dire la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$; on note $S(x)$ la somme de cette série lorsqu'elle est convergente.

a. Prouver que $\forall x \in I \quad S(x) = \tan x$.

b. Quel est le rayon de convergence de la série entière définissant S ?

PARTIE C

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\exists (M, K) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |s_n| \leq M\, K^n\ .$$

C.1. Montrer que $\mathcal{S}$ a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

C.2. On considère la loi $\otimes$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $a \otimes b = c$ tel que, pour tout n entier naturel, $\displaystyle c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p b_q$.

a. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable pour la loi $\otimes$.

b. Déterminer un élément neutre pour la loi $\otimes$ sur $\mathcal{S}$, on le notera e.

C.3.a. Soit $a \in \mathcal{S}$ tel que $a_0 = 1$. Montrer qu'il existe une unique suite $b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a \otimes b = e$.

b. Soient $M > 0$ et $K > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M\, K^n$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |b_n| \leq (1+M)^n\, K^n\ .$$

En déduire que $b \in \mathcal{S}$.

C.4.a. Soit $s \in \mathcal{S}$. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} s_n x^n$?

b. Inversement, soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} s_n x^n$ une série entière de rayon de convergence non nul. Montrer que la suite $s = (s_n)$ appartient à $\mathcal{S}$.

C.5.a. Soit h une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$ (avec $R > 0$), et vérifiant $h(0) = 1$. Montrer que la fonction $\dfrac{1}{h}$ est développable en série entière dans un intervalle $]-r, r[$ avec $r > 0$.

b. En déduire (sans utiliser les parties **A** et **B**) que la fonction tangente est développable en série entière dans un voisinage de zéro.